

Für die folgenden zwei Beispiele setzen wir lediglich *inexakte* Löser auf den Teilräumen V_i voraus und nehmen an dass A1 und A3 erfüllt sind.

10 Zeige dass für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} a(P_i v, w) &\leq a(P_i v, v)^{1/2} a(P_i w, w)^{1/2} \\ a(P_i v, P_k w) &\leq \omega \varepsilon_{ik} a(P_i v, v)^{1/2} a(P_k w, w)^{1/2} \end{aligned}$$

11 Wir definieren

$$E_j := (I - P_j)(I - P_{j-1}) \cdots (I - P_1)$$

für $j = 1, \dots, N$ und $E_0 := I$. Sei weiters E_j^* die Adjungierte von E_j bzgl. $a(\cdot, \cdot)$, d.h.

$$a(E_j^* v, w) = a(v, E_j w) \quad \forall v, w \in V.$$

Berechne E_j^* und zeige, dass

$$a((I - E_N^* E_N)u, u) \geq (2 - \omega) \sum_{j=1}^N a(P_j E_{j-1} u, E_{j-1} u)$$

Hinweis: Finde Q_j sodass

$$I - E_N^* E_N = \sum_{j=1}^N (E_{j-1}^* E_{j-1} - E_j^* E_j) = \sum_{j=1}^N (E_{j-1}^* Q_j E_{j-1})$$

und schätze $a(Q_j w, w)$ nach unten durch $a(P_j w, w)$ ab.

Bemerkung: Man kann weiters zeigen dass

$$\sum_{j=1}^N a(P_j E_{j-1} u, E_{j-1} u) \geq \frac{1}{\max(1, \omega^2) \rho(\mathcal{E})^2} a(P_{\text{ad}} u, u),$$

woraus schlussendlich die Aussage von Theorem 2.18 folgt.

12 Wähle eine Raumdimension $d \in \{1, 2, 3\}$ nach Belieben. Sei $\mathcal{T}^h(\Omega)$ eine Familie von Triangulierungen.

Zeige, dass für jedes Element T und jede quadratische Funktion u auf T

$$\|I^h u\|_{L^2(T)} \lesssim \|u\|_{L^2(T)},$$

wobei I^h den Interpolator aus Definition 2.19 bezeichnet.

Hinweis: Transformation auf das Referenzelement.

Für Doktoratsstudierende: Zeige dass für form-reguläre Netze die entsprechende Äquivalenz der H^1 -Seminormen gilt.