$\boxed{07}$ Vervollständige den Beweis von Lemma 2.13: Zeige dass für jedes $u \in V$ eine eindeutige Zerlegung

$$u = \sum_{i=1}^{N} R_i^\top u_i \tag{3.1}$$

existiert sodass

$$a(P_{\mathrm{ad}}^{-1} u,\, u) = \sum_{i=1}^{N} a_i(u_i,\, u_i). \tag{3.2}$$

Hinweis wie man $\{u_i\}_{i=1}^N$ *findet:* Substituiere $v := P_{\mathrm{ad}}^{-1} u$ in der linken Seite von (3.2) und bringe sie (mithilfe der VL oder der vorhergehenden Übungsbeispiele) auf die Form der rechten Seite von (3.2). Nun sollte sich u_i ablesen lassen.

$\boxed{08}$ Zeige dass

$$|||u||| := \Bigg[\min_{\substack{u_i \in V_i \\ u = \sum_{i=1}^N R_i^\top u_i}} \sum_{i=1}^{N} a_i(u_i,\, u_i) \Bigg]^{1/2} \tag{3.3}$$

eine Norm auf V ist. Es dürfen alle bisher bewiesenen Resultate verwendet werden.

$\boxed{09}$ Sei $R_i^\top$ injektiv. Zeige:

$$\mathrm{range}(P_i) = R_i^\top(V_i).$$

BONUS: Zeige:

$$\mathrm{range}(I - P_i) = \mathrm{range}(P_i)^{\perp_{a(\cdot,\cdot)}} := \big\{ v \in V : a(v,\, w) = 0 \quad \forall w \in \mathrm{range}(P_i) \big\}.$$

Eventuell hilfreich:
Sei X ein Hilbertraum und $S \subset X$. Der *Polar* $S^\circ \subset X^*$ ist definiert durch

$$S^\circ := \big\{ \psi \in X^* : \langle \psi,\, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S \big\}.$$

Seien X, Y Hilberträume, $K : X \to Y$ linear und beschränkt. Dann gilt:

$$\mathrm{range}(K)^\circ = \ker(K^\top).$$

Achtung: $\ker(K^\top)^\circ = \mathrm{range}(K)$ genau dann wenn $\mathrm{range}(K)$ abgeschlossen!