1 ■ **Beispiel aus Kap. 1: Optimalsteuerproblem "Hot Spot"**

$$\min_{\underset{\text{Zustand}}{y\in Y},\ \underset{\text{Steuerung}}{u\in U}} J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |y(x)-\underbrace{y_d(x)}_{\text{desired state}}|^2 dx + \frac{\overbrace{\alpha}^{\text{Regularisierung}}}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 dx$$

ges

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega y^2 dx - \int_\Omega y_d y\, dx + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega y_d^2 dx}}_{=\text{Const}} + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

s.t. PDE constraints:

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{div}(A(x)\nabla y(x)) = u(x), & x\in\Omega \\ y(x) = g(x) \underset{\text{OBdA}}{:=} 0, & x\in\Gamma=\partial\Omega \end{bmatrix}$$

Box constraints (ges.):

$$\begin{bmatrix} \text{State constraints}: & \underline{y}(x) \le y(x) \le \overline{y}(x),\ x\in\overline{\Omega} \\ \text{Control constraints}: & \underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x),\ x\in\overline{\Omega} \end{bmatrix}$$

Die Variationsformulierung der PDE ergibt schliesslich das folgende **unendlichdimensionale** restringierte OP:

$$\min_{y\in Y=\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\ u\in U=L_2(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega y^2 dx - \int_\Omega y_d y\, dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

$$\text{s.t.}\quad \int_\Omega A(x)\nabla y(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \forall v\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$

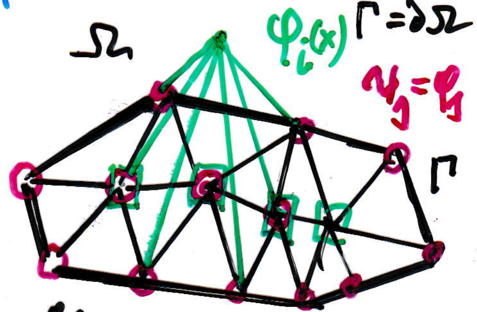
$$\underline{y} \le y \le \overline{y} \quad \text{und} \quad \underline{u} \le u \le \overline{u} \quad \text{in } \Omega$$

FE-Diskretisierung (vgl. Kap. 2):

$$Y_h = \operatorname{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_{n_s}\} \subset Y = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$

$$U_h = \operatorname{span}\{\psi_1,\dots,\psi_{n_c}\} \subset U = L_2(\Omega)$$

z.B. $\psi_1 = \varphi_1, \dots, \psi_{n_c} = \varphi_{n_c}$



$$Y_h \ni y_h(x) = \sum_{i=1}^{n_s} y_i\varphi_i(x) \approx y(x)\in Y = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$

$$U_h \ni u_h(x) = \sum_{j=1}^{n_c} u_j\psi_j(x) \approx u(x)\in U = L_2(\Omega)$$

$\psi_j = \chi_{\delta_j}$ Charakt. Fkt v. δ_j

alterna. Wahl

ergibt das **endlichdimensionale restringierte OP:**

$$\min_{y_h\in Y_h,\, u_h\in \bar{U}_h} \frac{1}{2}\int_\Omega y_h^2\,dx - \int_\Omega y_d y_h\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u_h^2\,dx$$

s.t. $\int_\Omega A(x)\nabla y_h(x)\cdot\nabla v_h(x)\,dx = \int_\Omega u_h(x)v_h(x)\,dx \quad \forall v_h\in Y_h$

$\underline{y}_i := \underline{y}(x_i) \le y_i := y_h(x_i) \le \bar{y}_i := \bar{y}(x_i),\ i=\overline{1,n_s}$

$\underline{u}_i := \underline{u}(x_i) \le u_i := u_h(x_i) \le \bar{u}_i := \bar{u}(x_i),\ i=\overline{1,n_c}$

Generierung mit FEM-Technologie siehe FE-Code im Pkt. 2.10.4.

$y_h \xleftrightarrow[ISO]{FE} \underline{y}_h := [y_i]_{i=\overline{1,n_s}}$, $\quad u_h \xleftrightarrow[ISO]{FE} \underline{u}_h = [u_j]_{j=\overline{1,n_c}}$

$(K_{\cancel{h}}\,\underline{y}_h, \underline{v}_h) = \int_\Omega A\nabla y_h\cdot\nabla v_h\,dx \quad \forall y_h \leftrightarrow \underline{y}_h\in\mathbb{R}^{n_s},\ v_h\leftrightarrow\underline{v}_h\in\mathbb{R}^{n_s}$

$(M_s\,\underline{y}_h, \underline{v}_h) = \int_\Omega y_h(x)v_h(x)\,dx \qquad$ — " —

$(M_c\,\underline{u}_h, \underline{z}_h) = \int_\Omega u_h(x)z_h(x)\,dx \quad \forall u_h, z_h \leftrightarrow \underline{u}_h, \underline{z}_h\in\mathbb{R}^{n_c}$

$(M_{sc}\,\underline{u}_h, \underline{y}_h) = \int_\Omega u_h y_h\,dx \quad \forall u_h\leftrightarrow\underline{u}_h\in\mathbb{R}^{n_c},\ \forall y_h\leftrightarrow\underline{y}_h\in\mathbb{R}^{n_s}$

$(\underline{y}_{dh}, \underline{y}_h) = \int_\Omega y_d(x)y_h(x)\,dx \quad \forall y_h\leftrightarrow\underline{y}_h\in\mathbb{R}^{n_s}$

$$\min_{\underline{x}=(\underline{y}_h,\underline{u}_h)\in\mathbb{R}^{n=n_s+n_c}} \underbrace{\frac{1}{2}\left[(M_s\underline{y}_h,\underline{y}_h) - (\underline{y}_{dh},\underline{y}_h) + \frac{\alpha}{2}(M_c\underline{u}_c,\underline{u}_c)\right]}_{f(\underline{x})}$$

s.t. $K\underline{y}_h = M_{sc}\underline{u}_h \qquad c_i(\underline{x}) := (K\underline{y}_h - M_{sc}\underline{u}_h)_i = 0,\ i=\overline{1,m_1=n_s}$

$\underline{y}_i \le y_i \le \bar{y}_i,\ i=\overline{1,n_s}$

$\underline{u}_i \le u_i \le \bar{u}_i,\ i=\overline{1,n_c}$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{y}_i - y_i \le 0\\ y_i - \bar{y}_i \le 0\\ \underline{u}_i - u_i \le 0\\ u_i - \bar{u}_i \le 0\end{array}\right\}\quad c_i(\underline{x}) \le 0,\ i=m_1+1,\dots,m_1+m_2,\ m_2 = 2n_s+2n_c$$

$(1)_{rOP}$

$$\min_{\underline{x}\in\mathbb{R}^n} f(\underline{x})$$

s.t. $c_i(\underline{x}) = 0,\ i=1,2,\dots,m_1$

$c_i(\underline{x}) \le 0,\ i=m_1+1,\dots,m_1+m_2$

3

- <u>Beispiel aus Kap. 1 (siehe auch Anfang von Kap. 5):</u>
  = Optimalsteuerproblem "Hot Spot"
  <u>jetzt:</u> ohne Ungleichungsnebenbed., d.h. $m_2 = 0$, $m_1 = m$:

$(1)_{rOP}$ $m_2 = 0$

$$\min_{x=(\underline{y}, \underline{u}) \in \mathbb{R}^{n=n_s+n_c}} \underbrace{\left[\frac{1}{2}(M_s \underline{y}, \underline{y}) - (\underline{y}_d, \underline{y}) + \frac{\alpha}{2}(M_c \underline{u}, \underline{u})\right]}_{=: \, f(x)}$$

$$\text{s.t. } K\underline{y} - M_{sc}\underline{u} = 0 \qquad c_i(x) := [K\underline{y} - M_{sc}\underline{u}]_i = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, m_1 = m = n_s$$

- CQ = Constraint Qualification:

$$\text{rang } c'(x^*) = \text{rang}\left[\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \text{rang } \overset{\text{res.}}{\underset{n_s \times n_s}{[K, M]}} = m = n_s$$

- <u>Dann gilt:</u> $\underline{y} = +K^{-1}M_{sc}\underline{u} = S_{sc}\underline{u}$ mit $S_{sc} = +K^{-1}M_{sc}$,
  d.h. $(1)_{rOP}$ ist äquivalent zum freien OP

$(1)_{fOP}$

$$\min_{\underline{u} \in \mathbb{R}^{n_c}} \left[\frac{1}{2}(M_s S_{sc}\underline{u}, S_{sc}\underline{u}) - (\underline{y}_d, S_{sc}\underline{u}) + \frac{\alpha}{2}(M_c \underline{u}, \underline{u})\right]$$

$$\min_{\underline{u} \in \mathbb{R}^{n_c}} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(S_{sc}^T M_s S_{sc} + \alpha M_c)}_{A}\underline{u}, \underline{u}\Big) - (\underbrace{S_{sc}^T \underline{y}_d}_{b}, \underline{u})$$

$$\underline{u} \in \mathbb{R}^{n_c}: \; (S_{sc}^T M_s S_{sc} + \alpha M_c)\underline{u} = S_{sc}^T \underline{y}_d$$

$$(M_{sc}^T K^{-1} M_s K^{-1} M_{sc} + \alpha M_c)\underline{u} = +M_{sc}^T K^{-1} \underline{y}_d$$

SPD

$\Downarrow$

$\exists! \, \underline{u} \in \mathbb{R}^n$ falls $\alpha > 0$

- <u>Lagrange-Funktion:</u> $m = n_s$, $x = (\underline{y}, \underline{u}) \in \mathbb{R}^{n = n_s + n_c}$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ = Lagrange Multiplikatoren = adjoint state

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(x)$$

$$= \frac{1}{2}(M_s \underline{y}, \underline{y}) - (\underline{y}_d, \underline{y}) + \frac{\alpha}{2}(M_c \underline{u}, \underline{u}) + \lambda^T (K\underline{y} - M_{sc} \underline{u})$$

- <u>KKT-System:</u> $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$

$(1)_{KKT}$

$\nabla_y L(\underline{y}, \underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$	$M_s \underline{y} + K^T \underline{\lambda} = \underline{y}_d$
$\nabla_u L(\underline{y}, \underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$	$\alpha M_c \underline{u} - M_{sc}^T \underline{\lambda} = 0$
$\nabla_\lambda L(\underline{y}, \underline{u}, \underline{\lambda}) = 0$	$K\underline{y} - M_{sc} \underline{u} = 0$

KKT-System = Optimalitätssystem (notwend. Optbed.)

$$(1)_{KKT} \quad \begin{array}{c} 1. \\ 2. \\ 3. \end{array} \begin{bmatrix} M_s & 0 & K^T \\ 0 & \alpha M_c & -M_{sc} \\ K & -M_{sc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1 \ \underline{\lambda} \\ \\ 1 \ \underline{y} \end{array} \quad 2a$$

symmetrisch, aber indefinit!

wobei $K = K^T > 0$, d.h. SPD — Steifigkeitsmatrix

$M_s = M_s^T > 0$, d.h. SPD — Zustandsmassenmatrix

$M_c = M_c^T > 0$, d.h. SPD — Kontrollmassenmatrix

$M_{cs} = M_{sc}^T$ – $(n_c \times n_s)$-Matrix

- <u>Bemerkung:</u>

$\exists !\ (x, \lambda) = ((\underline{y}, \underline{u}), \underline{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n_s + n_c + n_s}$: $(1)_{KKT}$ ist garantiert!

$x = (\underline{y}, \underline{u})$ ist eindeutiger Minpunkt von $f(x)$,

d.h. $(1)_{rOP}$ hat eine eindeutige Lösung,

die mit Hilfe von $(1)_{KKT}$ berechnet wird.

5

- Schur-Komplementbildung: Reduzierte Optimalitätssysteme

① Eliminieren $\underline{y}$ und $\underline{\lambda}$ aus $(1)_{KKT}$:

1. $\underline{\lambda} = -K^{-1} M_s \underline{y} + K^{-1} \underline{y}_d \qquad (K = K^T)$

3. $\underline{y} = +K^{-1} M_{sc} \underline{u} = S_{sc} \underline{u}$ mit $S_{sc} = +K^{-1} M_{sc}$

und in die 2. Gleichung einsetzen:

$$\alpha M_c \underline{u} - M_{sc}^T (-K^{-1} M_s \underline{y} + K^{-1} \underline{y}_d) = 0$$

$$\alpha M_c \underline{u} + M_{sc}^T K^{-1} M_s y = M_{sc}^T K^{-1} \underline{y}_d$$

$$\alpha M_c \underline{u} + M_{sc}^T K^{-1} M_s K^{-1} M_{sc} \underline{u} = M_{sc}^T K^{-1} \underline{y}_d$$

$$(1)_{FOP} \quad \boxed{(M_{sc}^T K^{-T} M_s K^{-1} M_{sc} + \alpha M_c) \underline{u} = M_{sc}^T K^{-1} \underline{y}_d} \quad (M)$$

② Eliminieren

a) erst $\underline{u}$ aus $(1)_{KKT}$ mit der 2. Gleichung

$$\underline{u} = \frac{1}{\alpha} M_c^{-1} M_{sc}^T \lambda \longrightarrow 3.$$

$$②_{a)} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} M_s & K^T \\ K & -\frac{1}{\alpha} M_{sc} M_c^{-1} M_{sc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) und dann $\underline{y}$ aus $②_{a)}$ mit der 1. Gleichung

$$\underline{y} = -M_s^{-1} K^T \lambda + M_s^{-1} \underline{y}_d \longrightarrow 3.$$

$$②_{b)} \quad \boxed{(K M_s^{-1} K^T + \frac{1}{\alpha} M_{sc} M_c^{-1} M_{sc}^T) \underline{\lambda} = K M_{sc}^T \underline{y}_d}$$

= reduziertes Optimalitätssystem bzw. red. KKT-System