# 5.2.4. Quadratische Optimierungsprobleme

- Btr. das allgemeine restringierte quadratische Optimierungsproblem (rq OP = QP = Quadratic Programming)

(21) (QP)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } x^* \in \mathbb{R}^n: \\ q(x^*) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} q(x) := \cancel{f} + \overbrace{g^T \cdot x + \frac{1}{2} x^T B x}^{\text{quadratisch}} \\ \quad \text{s.t. } c_i + a_i^T x = 0, \ i \in I_1 = \{1, \dots, m_1\} \\ \quad \phantom{\text{s.t. }} \underbrace{c_i + a_i^T x}_{\text{(affine) Linear}} \le 0, \ i \in I_2 = \{m_1+1, \dots, \underbrace{m_1+m_2}_{=m}\} \end{array}}$$

mit geg. $f, c_i \in \mathbb{R}$ und $g, a_i \in \mathbb{R}^n$ sowie geg. Matrix $\overset{\text{SPD}}{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- **Bem.:** (QP) mit reinen Gleichungsnebenbed., d.h. $I_2 = \emptyset$, führt nach Satz 5.16 / Bem. 5.17 auf die Lösung des ~~nicht~~linearen GS

$(22) = (18)_{QP}$ $\boxed{\nabla L(x, \lambda) = 0}$ KKT-System

mit der Lagrange-FKt. $(m = m_1)$

$$L(x, \lambda) = q(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c_i + \underbrace{a_i^T x}_{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k}),$$

d.h. (22) ergibt sich zu

(22)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_j}(c_i + a_i^T x) = 0, & j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = c_i + a_i^T x = 0, & i = 1, \dots, m \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

(22)
$$\boxed{\begin{array}{ll} g_j + (Bx)_j + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0, & j = 1, \dots, n \\ c_i + a_i^T x = 0, & i = 1, \dots, m \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

KKT (22)
$$\begin{bmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ -c \end{bmatrix} \quad \text{mit } A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{(m\times n)\text{-Matrix}}$$