OP mit Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen:

- Analog zur Def. 4.15 ordnen wir auch dem OP $(1)_{rOP}$ die Lagrange-FKt. $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(16)\quad L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(x) = f(x) + (\lambda, c(x))$$

zu, wobei $m = m_1 + m_2$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$ - Lag. Mult.

- Bezeichnungen:
  1) Gradient der Lagrange-FKt. bzgl. x:
  $\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla c_i(x)$.
  2) Hesse-Matrix der Lagrange-FKt. bzgl. x:
  $\nabla_{xx} L(x,\lambda) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 c_i(x)$ (sym.)
  3) Menge der Indizes der in x aktiven NB:
  $\mathcal{A}(x) := \{ i \in I_1 \cup I_2 = \{1,2,\dots,m\} : c_i(x) = 0 \}$.

- **Satz 5.18:** (notwendige Optimalitätsbedingung)
Seien $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar und sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Min. des restr. OP $(1)_{rOP}$. Falls $\{ \nabla c_i(x^*) : i \in \mathcal{A}(x^*) \}$ linear unabhängig sind (Linear Independence Constraint Qualification = LICQ), dann existiert genau ein Vektor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$:

$(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: KKT-Pkt.

$$(19)\quad \boxed{\begin{array}{c} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0 \\ c_i(x^*) = 0 \text{ für } i \in I_1 \\ c_i(x^*) \le 0,\ \lambda_i^* \ge 0,\ \lambda_i^* c_i(x^*) = 0,\ i \in I_2 \end{array}}$$

= KKT-Bd.
Karush
Kuhn
Tucker

- **Satz 5.19:** (hinreichende Bedingungen)
Falls $x^* \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ die KKT-Bed. (19) erfüllen und $\nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*)$ p.d. ist, dann ist x^* ein striktes lok. Min.

- Bem.: $s^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) s > 0 \ \forall \underset{s \neq 0}{s \in \mathbb{R}^n} \Downarrow \forall s \in C(x^*, \lambda^*),\ s \neq 0$ Cone of Critical Directions