5.2.2. Theoretische Grundlagen

- **Optimierungsprobleme mit Gleichungsnebenbed.:**

- Btr. $(1)_{rop}$ mit $m = m_1 < n$ und $m_2 = 0$, d.h.

$$(15) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{s.t. } c_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$c_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ s.t. $c(x) = 0$

$m_1 = m$, $m_2 = 0$

Bem.: Satz über implizite Fkten: $(15) \Rightarrow$ fOP

T →

- Def. 5.15: (Lagrange-Fkt., Lagrange-Multipl.)

Die zu $(f, c) =$ (Zielfkt, NB) gehörige Lagrange-Funktion ist definiert als:

$$(16) \quad L(x, \lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) :=$$

$$:= f(x) + (\lambda, c(x))_{\mathbb{R}^m} = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(x_1, \dots, x_n)$$

Parameter

Die $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ heißen Lagrange-Multiplik.

- Satz 5.16: (Notwendige Extremalbed.)

Vor.: 1. Seien $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar und sei $m \leq n$.

2. x^* sei Stelle eines lokalen Extremum von f unter der NB $c(x^*) = 0$:

CQ

$$\operatorname{rang} c'(x^*) = \operatorname{rang} \left[\frac{\partial c}{\partial x}\right] = \operatorname{rang} \left[\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = m.$$

Bh.: Dann $\exists! \lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$:

$$(18) \quad \boxed{\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0}$$

nGS in $\mathbb{R}^{n+m}$

T → Bsp.: Hot Spot