- Angenommen es existiert eine Parameterisierung der Lösung der NB, d.h.

$$\exists\, x = x(t) = (x_1(t), x_2(t)) : c(x_1(t), x_2(t)) = 0,\ t \in [t_a, t_e)$$

Durch Differentieren der NB nach t erhalten wir:

$$0 = \frac{d}{dt} c(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial c}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial c}{\partial x_2} x_2' = \left(\nabla c, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}\right)$$

Offbar gilt:

$$\boxed{\nabla c \perp \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}$$

lok. Extr. $f(x_1,x_2)$ unter NB $c(x_1,x_2)=0$	$\Longleftrightarrow$	freies lok. Extr. von $F(t) := f(x_1(t), x_2(t))$

Sei nun $(x_1^*, x_2^*) = (x_1(t^*), x_2(t^*))$ ein lok. Extr., d.h.

$$F'(t^*) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)\, x_1'(t^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)\, x_2'(t^*) = 0, \text{ d.h.}$$

$$\boxed{\nabla f(x_1^*, x_2^*) \perp \begin{pmatrix} x_1'(t^*) \\ x_2'(t^*) \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \exists\, \lambda^* \in \mathbb{R} : \nabla f(x_1^*, x_2^*) = -\lambda^* \nabla c(x_1^*, x_2^*)$$

λ^* heißt Lagrange-Multiplikator.

- Resultat: Wir erhalten also für Extremalwertprobleme

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x_1,x_2) \longrightarrow \text{extr. (min / max)} \\ & \text{s.t. } c(x_1,x_2) = 0 \end{aligned}}$$

die notwendige Extremalbedingung

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) &= \\ \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) &= \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} \nabla f(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* \nabla c(x_1^*, x_2^*) &= 0 \\ c(x_1^*, x_2^*) &= 0 \end{aligned}} = \text{nGS},$$

die wir mit Hilfe der sogenannten Lagrange-Fkt.

$$L(x,\lambda) = L(x_1, x_2, \lambda) := f(x_1,x_2) + \lambda_1 c_1(x_1,x_2)$$

auch kompakt in der Form $\boxed{\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0}$ schreiben können.