5.1.4. Quasi-Newton-Verfahren

■ **Idee:**

1. Ersetzen $\overbrace{}^{\text{in}}$ $q_K(x)$ die Hesse-Matrix $H(x^{(k)})$ durch eine Approximation $B^{(k)}$.
Dann erhält man anstelle der Newton-Richtung die Suchrichtung
$$s^{(k)} = -B^{(k)-1}\nabla f(x^{(k)}) = -B^{(k)-1}F(x^{(k)}).$$

2. Wähle $B^{(0)}$ z.B. $B^{(0)} = H(x^{(0)})$ oder $B^{(0)} = I$.
Für geg. $B^{(k)}$ berechnen neue Approximation $B^{(k+1)}$ der Hesse-Matrix im nächsten Iterationspkt so, daß die folgenden 3 Bedingungen erfüllt werden:

1) Quasi-Newton-Bd.: (Sekantenbed.)
$$B^{(k+1)}\underbrace{(x^{(k+1)} - x^{(k)})}_{=:w^{(k)}} = \underbrace{F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})}_{=:y^{(k)}}$$

<u>Bem.:</u> Für $n=1$ ist das die Sekantenbed.:
$$B^{(k+1)} = \frac{F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}$$
$\rightsquigarrow$ Sekantenverfahren:
$$x^{(k+2)} = x^{(k+1)} - \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})}F(x^{(k+1)})$$

2) $B^{(k+1)}$ ist SPD. Diese Bedingung sichert, daß die nächste Suchrichtung
$$s^{(k+1)} = -(B^{(k+1)})^{-1}\nabla f(x^{(k+1)})$$
eine Abstiegsrichtung ist. Tatsächlich
$$\nabla f(x^{(k+1)})^T s^{(k+1)} = -\nabla f(x^{(k+1)})(B^{(k+1)})^{-1}\nabla f(x^{(k+1)}) < 0$$

3) $B^{(k+1)} = B^{(k)} +$ Niedrigrangmatrix
Rang-1 oder Rang-2