5.1.3. Das Newton-Verfahren

- Idee: Sei $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ eine Näherung an ein lok. Min. v. f.

Aus der Taylor-Entwicklung (vgl. auch (2))

(9) $$f(x) = \underbrace{f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)})(x-x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x-x^{(k)})^T H(x^{(k)})(x-x^{(k)})}_{=: q_k(x)} + \cancel{HOT}$$

$HOT = o(\|x-x^{(k)}\|^2)$

folgt, daß sich $f(x)$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(x^{(k)})$ von $x^{(k)}$ durch die quadratische Fkt.

(10) $$q_k(x) := f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)})(x-x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x-x^{(k)})^T H(x^{(k)})(x-x^{(k)}) \approx f(x)$$

gut approximieren läßt!

Die nächste Iteration $x^{(k+1)}$ des Newton-Verfahrens in der Optimierung wird als Minimum der quadratischen Funktion $q_k(x)$ definiert:

$$q_k(x^{(k+1)}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} q_k(x).$$ SQP

Unter der Annahme, daß (vgl. Satz 5.5)

$\nabla^2 q_k(x^{(k)}) = H(x^{(k)})$ positiv definit ist,

ist $x^{(k+1)}$ nach Satz 5.4 durch die Bedingung

$$\nabla q_k(x^{(k+1)}) = \nabla f(x^{(k)}) + H(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

eindeutig definiert, d.h.

(11) $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}) = x^{(k)} + \alpha^{(k+1)} s^{(k)}$$

mit der Schrittweite $\alpha^{(k+1)} = 1$ und der Suchrichtung

(12) $$s^{(k)} = -H(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})$$ (Newton-Richtung)