- Der <u>Hessian</u> $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist durch

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} = H^T(x)$$

Satz von Schwarz

gegeben. $H(x)$ nennt man die <u>Hesse-Matrix</u> von f an der Stelle x. Die Hesse-Matrix ist symmetrisch

- Aus der Taylor-Darstellung

f-quadr. $=0$

$n=1$ $$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x-x^*) + \tfrac{1}{2}(x-x^*) f''(x^*)(x-x^*) + o(\|x-x^*\|^2)$$

(2) $n \geq 1$ $$f(x) = f(x^*) + \underset{\substack{= \\ 0 \\ \text{notwendig}}}{\nabla^T f(x^*)}(x-x^*) + \underbrace{\tfrac{1}{2}(x-x^*)^T H(x^*)(x-x^*)}_{\substack{> 0 \\ \geq}\ \text{hinreichend}} + \underline{o(\|x-x^*\|^2)}$$

$f(x) \underset{\geq}{>} f(x^*)$

folgen sofort notwendige und hinreichende Bedingungen für ein lokales Minimum von f:

- <u>Satz 5.4:</u> (notwendige Bedingung)
  Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum (Maximum) von f. Dann gilt:

  (3) $\nabla f(x^*) = 0$ $\left(= \text{nichtl. GS } \boxed{\overset{\nabla f(x)}{\overset{=}{F}}(x) = 0} \text{ in } \mathbb{R}^n\right)$

- <u>Satz 5.5:</u> (hinreichend Bedingung)
  Falls $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt von f ist, d.h. eine Lösung des nichtlinearen GS (3) ist, und $H(x^*)$ positiv (definit) ist, dann ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein (striktes) lokales Minimum.