Beispiel aus Kapitel 1: Optimalsteuerproblem

$$\min_{y \in Y,\, u \in U} J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (y(x)-y_d(x))^2\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (u(x))^2\,dx$$

$$\text{s.t.} \left.\begin{array}{ll} -\operatorname{div}(A(x)\nabla y(x)) = u(x), & x \in \Omega \\ +\ BC:\ y(x) = g(x) := 0 & , x \in \Gamma \end{array}\right\} \text{(PDE constr.)}$$

State constraints: $\underline{y}(x) \le y(x) \le \overline{y}(x),\ x \in \Omega$

Control constr. : $\underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x),\ x \in \Omega$

Die Variationsformulierung der PDE ergibt schließlich das folgende <u>unendlichdim. restr. OP</u>:

$$\min_{y \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\, u \in L_2(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega (y(x)-y_d(x))^2\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (u(x))^2\,dx$$

$$\text{s.t.} \int_\Omega A(x)\nabla y(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$

$$\underline{y}(x) \le y(x) \le \overline{y}(x),\ x \in \Omega$$

$$\underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x),\ x \in \Omega$$

Die FEM-Diskretisierung

$$y \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \approx y_h(x) = \sum_{i=1}^{n_s} y_i \varphi_i(x) \in Y_h,\ \dim Y_h = n_s$$

$$u \in L_2(\Omega) \approx u_h(x) = \sum_{i=1}^{n_c} u_i \varphi_i(x) \in U_h,\ \dim U_h = n_c$$

ergibt das <u>endlichdimensionale restringierte OP</u>:

$$\min_{x = (\underline{y}_h, \underline{u}_h) \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(M_s \underline{y}, \underline{y}) - (\underline{y}_d, \underline{y}) + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega (y_d(x))^2 dx}}_{\text{const}} + \frac{\alpha}{2}(M_c \underline{u}_h, \underline{u}_h)$$

$$\text{s.t.}\quad K_h \underline{y}_h = M_{sc,h}\underline{u}_h$$

$$\underline{y}_i \le y_i \le \overline{y}_i,\ i = \overline{1, n_s}$$

$$\underline{u}_j \le u_j \le \overline{u}_j,\ j = \overline{1, n_c}$$

K – Steifigkeitsmatrix

M_s, M_c, M_{sc} – Massematrizen