4.3.2. Hyperbolische Probleme

■ Btr. die hyperbolische ARWA (z.B. Akustik):

$$(H)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t),\ (x,t)\in Q = \Omega\times(0,T) \\ + RB:\ z.B.\ 1.\ Art:\ u(x,t) = 0,\ (x,t)\in\Sigma = \partial\Omega\times(0,T) \\ + AB:\ u(x,0) = u_0(x)\ \text{und}\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x),\ x\in\overline{\Omega} \end{cases}$$

■ Diskretisierungstechniken:

1. Erst ZEIT, dann RAUM = horizontale Linienmethode
2. Erst RAUM, dann ZEIT = vertikale Linienmethode
3. RAUM-ZEIT-Methoden

• Startpunkt = Linienvariationsformulierung von (H):

$$(15)\begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\,v(x)\,dx \quad \forall v\in V_g = V_0 \\ + AB:\ \int_\Omega u(x,0)\,v(x)\,dx = \int_\Omega u_0(x)v(x)\,dx,\ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\,v(x)\,dx = \int_\Omega u_1(x)v(x)\,dx \end{cases}$$

• Erst RAUM:

$$(16)\quad \text{Ges. } u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N_h} u_i(t)\,\varphi_i(x) \in V_{gh} = V_{0h} \quad \forall t\in[0,T]:$$

$$j = \overline{1,N_h}$$

$$(15)_h\begin{cases} \sum_{i=1}^{N_h} \frac{d^2 u_i}{dt}(t)\int_\Omega \varphi_i\varphi_j\,dx + \sum_{i=1}^{N_h} u_i(t)\int_\Omega \nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_j\,dx = \int_\Omega f(x,t)\varphi_j(x)\,dx \\ + AB:\ \sum_{i=1}^{N_h} u_i(0)\int_\Omega \varphi_i\varphi_j\,dx = \int_\Omega u_0\varphi_j\,dx,\ \sum_{i=1}^{N_h}\frac{du_i}{dx}(0)\int_\Omega\varphi_i\varphi_j\,dx = \int_\Omega u_1\varphi_j\,dx \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(15)_h\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Ges } \underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i=\overline{1,N_h}}:\ M_h\ddot{\underline{u}}_h(t) + K_h\underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t),\ t\in(0,T) \\ \qquad M_h\underline{u}_h(0) = \underline{u}_{0h},\ M_h\dot{\underline{u}}_h(0) = \underline{u}_{1h} \end{array}}$$

= AWA für System gewöhnlicher Dgl. 2. Ordnung

= AWA für doppeltsogrosses System gew. Dgl. 1. Ord. mit $\underline{v}_h = \dot{\underline{u}}_h$

• Dann ZEIT diskretisierung mit Zeitintegrationsverfahren

z.B. Newmark-Verfahren, siehe ZL (2013), S. 567-569