add 2 | Erst RAUM, dann ZEIT = vertikale LM:

- Startpkt = Linienvariationsformulierung von (P)

$$(13)\quad \begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, dx \\ + AB \quad \int_\Omega u(x,0)\, v(x)\, dx = \int_\Omega u_0(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in \hat{V}_0 \ \forall t \in (0,T) \end{cases}$$

- Erst RAUM mit FEM: Ansatz mit zeitabh. Koeffizienten, d.h.

$$(14)\quad \text{Ges. } u_h(x,t) = \sum_{i\in\omega_h} u_i(t)\,\varphi_i(x) + \sum_{i\in\gamma_h} \underbrace{g_1(x_i,t)}_{=0\ (\text{Bsp.})}\,\varphi_i(x) \in \hat{V}_{gh} = \hat{V}_{0h}$$

und einsetzen in (13) und dann testen mit $v_h = \varphi_j$, $j = \overline{1,N_h}$ ($j \in \omega_h$):

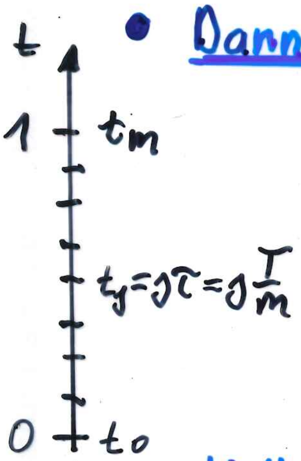
$$(13)_h\quad \begin{cases} \sum_{i\in\omega_h} \frac{\partial u_i}{\partial t}(t) \int_\Omega \varphi_i \varphi_j\, dx + \sum_{i\in\omega_h} u_i(t) \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j\, dx = \int_\Omega f(x,t)\,\varphi_j(x)\, dx, \ \forall j \in \omega_h \\ + AB: \ \sum_{i\in\omega_h} u_i(0) \int_\Omega \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\, dx = \int_\Omega u_0(x)\,\varphi_j(x)\, dx, \ j = \overline{1,N_h} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{(13)}_h\quad \boxed{\begin{aligned} &\text{Ges. } \underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i\in\omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h}: \ M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t), \ t \in (0,T) \\ &AB: \ M_h \underline{u}_h(0) = \underline{u}_{0h} \end{aligned}}$$

= AWA für System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung

- Dann ZEIT diskretisierung mit Zeitintegrationsverfahren



z.B. mit expliziten Euler (mms): nur bedingt stabil!

impliziten Euler: = A-stabil, d.h. unbed. st.

CRANK-NICOLSON: = A-stabil

Mehrschrittverfahren z.B. BDF

Ref.: JL (2013), Kap. 8: $u'(t) = f(t, u(t))$

Volldiskretes Schema: Ges. $\underline{u}_h^{j+1} \approx \underline{u}_h(t_j)$:

$$(\underline{13})_{h\tau}\quad M_h \frac{\underline{u}_h^{j+1} - \underline{u}_h^{j}}{\tau} + K_h \underline{u}_h^{j+1} = \underline{f}_h^{j+1} := \underline{f}_h(t_{j+1}), \quad M_h \underline{u}_h^0 = \underline{u}_{0h} \ (AB)$$

$$\left(K_h + \frac{1}{\tau} M_h\right) \underline{u}_h^{j+1} = \frac{1}{\tau} M_h \underline{u}_h^{j} + \underline{f}_h^{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$$