4.3. Galerkin FEM für instationäre Probleme

4.3.1. Parabolische Probleme

- Btr. wieder die parabolische ARWA

$$
(P)\quad \begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + Lu(x,t) = f(x,t), \; (x,t) \in Q := Q_T = \Omega \times (0,T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \\
\text{Modellproblem: } Lu = -\Delta u \text{ bzw. } Lu = -\frac{\lambda}{\varrho c}\Delta u \quad (1) \\
\text{Pkt. 1.3.4}: \; Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au \\
\qquad = -\operatorname{div}(A\nabla u) + \vec{a}\cdot\nabla u + au \\
+\text{ RB z.B. 1. Art: } u(x,t) = 0, \; (x,t) \in \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\
+\text{ AB: } u(x,0) = u_0(x), \; x \in \overline{\Omega}
\end{cases}
$$

- Diskretisierungstechniken:

1. Erst ZEIT, dann RAUM
   = horizontale Linienmethode = Rothe Methode
   → besonder für Adaptivität im Raum/Ort geeignet: AFEM
   → Ref.: J. Lang: Adaptive Multilevel Solution of Nonlinear Parabolic PDE Systems, Springer, 2000.
2. Erst RAUM, dann ZEIT
   = vertikale Linienmethode
   → Standardmethode
   → Ref.: V. Thomee: Galerkin FEMs for Parabolic Problems, Springer, 2006 (2. Auflage)
3. RAUM-ZEIT-Methoden (Space-time methods)
   → Hot research topic now!
   → Vorteile: Parallelisierung, Adaptivität, Bewegende Gebiete, ...
   → Nachteile: 1 grosses GS, viel Speicherplatz
   → Ref.: U. Langer, O. Steinbach (eds): Space-Time Methods: Applications to PDEs, deGruyter, 2019.