Analyse der Fehlerfortpflanzung für das θ-Verfahren (8):

- **Fehlerschema:** $z = \overset{(1)}{u} - \overset{(8)}{v}$

(10) $z^j_{t,i} - \theta \varkappa z^{j+1}_{\bar{x}x,i} - (1-\theta)\varkappa z^j_{\bar{x}x,i} = \psi_i^{j,\theta}$

mit $\psi_i^{j,\theta} = \theta \psi_i^j + (1-\theta)\psi_i^{j+1}$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{0,m-1}$

$+$ RB: $z_0^j = z_n^j = 0$, $j=\overline{1,n}$; $+$ AB: $z^0 = 0$ (Rdf!)

- **Vektor / Matrix-Schreibweise:**

$$z^{j+1} = z^j - \theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A z^{j+1} - (1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A z^j + \tau\psi^{j,\theta}$$

$$\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right) z^{j+1} = \left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right) z^j + \tau\psi^{j,\theta}$$

$$z^{j+1} = \left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right) z^j + \tau\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\psi^{j,\theta}$$

$$\|z^{j+1}\| \le \underbrace{\left\|\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)\right\|}_{=:\ q\ \le\ 1\ !}\|z^j\| + \tau\|\psi^{j,\theta}\|$$

$\left\|\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\right\| \le 1$

- **Für die Spektralnorm** $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ **erhalten wir**

$$q := \left\|\left(I+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)^{-1}\left(I-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}A\right)\right\|_2 \overset{A \text{ SPD}}{=}$$

$$= \max_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\frac{1-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda}{1+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda}\right| \underset{(\text{mmS})}{=} \left|\frac{1-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}{1+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}\right|$$

$\sigma(A) \subset (0,4]$ – Spektrum

$\sigma(A)$ = Menge alle EW von A

Hinweis: $\varphi(x) = (1-(1-\theta)x)/(1+\theta x)$ ↘

≤ 1

$$\underset{\text{gdw}}{\iff} \boxed{-1 \le \frac{1-(1-\theta)\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}{1+\theta\varkappa\frac{\tau}{h^2}\lambda_{max}(A)}} \le 1 \ \checkmark$$