3.2.2. CG für GS mit spd Matrizen

- Btr. nun GS (1) $Ax=b$ mit spd Matrix A, d.h. symmetrisch und positiv definit

(12) $A = A^T$ und $(Ax,x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq \mathbb{0}$.

Dann sind offenbar folgende Formulierungen äquivalent (vgl. auch Satz 3.1)

(1) Ges. $x \in \mathbb{R}^n$:

- $Ax = b$
- $(Ax,y) = (b,y) \ \forall y \in \mathbb{R}^n$

(13)
- $E(x) = \min\limits_{y \in \mathbb{R}^n} E(y)$

mit dem Energiefunktional

$$E(y) = \frac{1}{2}(Ay,y) - (b,y).$$

wobei $(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist, d.h

$$(x,y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Richtung des steilsten Abstiegs im Pkt. $y \in \mathbb{R}^n$:

(14) $-\nabla E(y) := -\left[\frac{\partial E(y)}{\partial y_i}\right]_{i=\overline{1,n}} = b - Ay =: d$