

3.2.1. Klassische Iterationverfahren

■ Jacobi-Verfahren (GSV = Gesamtschrittverfahren):

- Idee: $a_{i1}x_1 + \dots + \underline{a_{ii}x_i} + \dots + a_{in}x_n = b_i$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right] \text{ (explizit!)}$$

- Algorithmus:

Startnäherung: $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$ geg..

Iteration: $k=0, 1, \dots, k_{\text{stop}}$ (Defekttest (5)!) (6)

$$x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})^T \in \mathbb{R}^n:$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i=1, 2, \dots, n$$

- Nachteil: bei FE-Systemen $K_n u_n = f_n$:

Langsame Konvergenz (?), aber in gedämpfter Version (b)
gute Glättungseigenschaften \rightarrow **Multigrid-Methoden!**

■ Gauß-Seidel-Verfahren (ESV = Einzelschrittverfahren):

- Idee: Verwende die bereits berechneten neuen Komp.!

- Algorithmus:

Startnäherung: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ geg.

Iteration: $k=0, 1, \dots, k_{\text{stop}}$ (Defekttest (5)!) (7)

$$x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}):$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right]$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

- Nachteile bei FE-GS: langs. Konv., aber gute Glättung \rightarrow **MGM!**

$$\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n = 0$$