

3.2. Iterative Verfahren

■ Idee:

- Geg. $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ - Startnäherung
- Erzeugen (wie?) sukzessiv Folge von Näherungen

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \quad (1)$$

■ Fragen:

- Konstruktionsprinzipien
- Konvergenzanalyse: $x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$! ?
- Konvergenzgeschwindigkeit (KG) und Fehlerabschätzungen:

z. B. q -lineare KG, d.h. $\exists q \in (0, 1)$ - Konvergenzrate:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq q \|x - x^{(k-1)}\| \leq \dots \leq q^k \|x - x^{(0)}\|$$

r -lineare KG, d.h. $\exists q \in (0, 1)$ und $c = \text{const} > 0$:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq c q^k$$

- Praktisch: Konvergenztest, z. B. Defekttest:
Man stoppt die Iteration, falls

$$(5) \quad \|d^{(k)}\| \leq \varepsilon \|d^{(0)}\| \stackrel{\text{z.B.}}{:=} \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i^{(0)})^2}$$

Euklidische Norm

mit dem Defekt $d^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ und vorgeg. rel. Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-t} \in (0, 1)$.

- In welcher Norm $\|\cdot\|$ soll man den Fehler $z^{(k)} = x - x^{(k)}$ messen?

z. B. gilt für den Fehler $z^{(k)} = x - x^{(k)}$

$$\|z^{(k)}\|^2 := \|z^{(k)}\|_{A^T A}^2 := (A^T A z^{(k)}, z^{(k)}) = \|A(x - x^{(k)})\|^2 = \|d^{(k)}\|^2$$

wobei $\|\cdot\| := (\cdot, \cdot)^{0.5}$ - Euklidische Norm