2. Erst Ort, dann Zeit = Linienmethode

Startpkt = Linienvariationsformulierung z.B. von (P)

(31) $$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\cdot v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx \quad \forall v\in \mathring{V}_0 \quad \forall t\in(0,T)$$

Erst Ort: Ansatz (27) mit zeitabhängigen Koeffizienten

(32) $$u_h(x,t) = \sum_{i\in\omega_h} u_i(t)\varphi_i(x) + \sum_{i\in\gamma_h} \underbrace{g_1(x_i,t)}_{=0}\varphi_i(x) \in \mathring{V}_{gh} = V_{0h}$$

einsetzen in (31) und testen mit $v_h=\varphi_j$, $j\in\omega_h$:

$(31)_h$ $$\sum_{i\in\omega_h}\frac{\partial u_i}{\partial t}(t)\underbrace{\int_\Omega \varphi_i\varphi_j\,dx}_{M_{ji}} + \sum_{i\in\omega_h} u_i(t)\underbrace{\int_\Omega \nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_j\,dx}_{K_{ji}} = \int_\Omega f(x,t)\varphi_j(x)\,dx \quad j\in\omega_h$$

$$+\text{AB}: \quad \sum_{i\in\omega_h} u_i(0)\int_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \int_\Omega u_0(x)\varphi_j(x)\,dx$$

$(31)_h$ $$\boxed{\text{Ges. } \underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i\in\omega_h}\in\mathbb{R}^{N_h}: \; M_h\dot{\underline{u}}_h(t) + K_h\underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t) \quad t\in(0,T), \quad M_h\underline{u}_h(0) = \underline{u}_{0h}}$$

= AWA für System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung

Dann Zeitdiskretisierung mit Zeitintegrationsverfahren

z.B. impliziter Euler (mmc)

explizite und implizite RKV

3. Raum-Zeit-Methoden

(33) $$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,v(x,t)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla v(x,t)\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega f(x,t)\,v(x,t)\,dx\,dt$$

$$\forall v(x,t)\in \mathring{V}_0 := \{v\in H^1(Q_T):\ v=0 \text{ auf } \Gamma\times(0,T) \text{ und } \Omega\times\{0\}\}$$