3.11.2. Zeitabhängige Probleme (ARWA)

■ Parabolische und hyperbolische ARWA z.B.

(P) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_T := \Omega \times (0,T)$

$+$ RB z.B. 1. Art: $u(x,t) = 0\,,\ (x,t) \in \Gamma \times (0,T)$

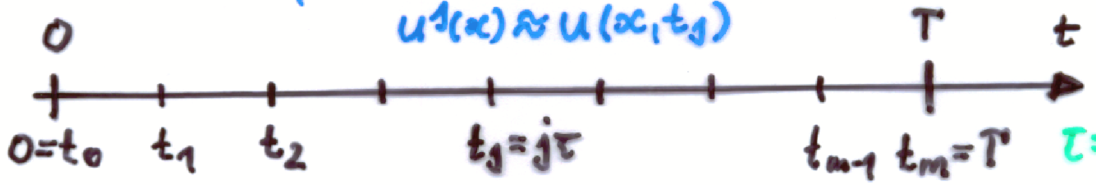
$+$ AB: $u(x,0) = u_0(x)\,,\ x \in \overline{\Omega}$

(mms) (H) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_T$

$+$ RB $+$ AB

■ Diskretisierungstechniken:

1. Erst Zeit, dann Raum = Rothe-Methode



$\tau = T/m$

Erst Zeit z.B. impliziter Euler für (P)

(30) $\frac{u^{j+1}(x) - u^j(x)}{\tau} - \Delta u^{j+1}(x) = f^{j+1}(x) := f(x, t_{j+1})\,,\ x \in \Omega$

$+$ RB $+$ AB ($u^0(x) := u_0(x)\,,\ x \in \overline{\Omega}$, geg.)

Für u^{j+1} erhalten wir folglich die VF

(30) Ges. $u^{j+1} \in V_g$: $\int_\Omega \left(\nabla u^{j+1} \cdot \nabla v + \frac{1}{\tau} u^{j+1} v\right) dx = \int_\Omega f^{j+1} v\, dx + \frac{1}{\tau}\int_\Omega u^j v\, dx$

$a(u^{j+1}, v) \qquad = \langle F^{j+1}, v\rangle \quad \forall v \in V_0$

Dann $\Big\Downarrow$ Ort (FE-Disk.)

$(30)_h$ Ges. $u_h^{j+1} \in V_{gh}$: $a(u_h^{j+1}, v_h) = \langle F^{j+1}, v_h\rangle \quad \forall v_h \in V_{0h}$

$\Big\Updownarrow$

$(30)_h$ $\quad \underline{u}_h^{j+1} \in \mathbb{R}^{N_h}$: $\tilde{K}_h\, \underline{u}_h^{j+1} = \underline{f}_h^{j+1}$

$j = 0, 1, \ldots, m-1 \qquad \tilde{K}_h = K_h + \frac{1}{\tau} M_h$