2.11. Nichtlineare Probleme

- Falls in PDgl. bzw. RB nichtlineare Terme auftreten, z.B.:

<u>PDgl.:</u> $-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u,\nabla u)) + a(x,u,\nabla u) = f(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$

z.B. $-\Delta u(x) + e^{u(x)} = f(x),\ x \in \Omega$

oder

$-\operatorname{div}(\nu(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x)) = f(x),\ x \in \Omega$

<u>RB:</u> $\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(u_A^4 - u^4)$ auf Γ_3 (Strahlungsrandbed.)

dann erhalten mittels FE-Diskr. ein <u>nichtlineares</u> GS der Art

(29) Ges. $\underline{u}_h = [u_i]_{i \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h}$: $K_h(\underline{u}_h) = \underline{f}_h$ in $\mathbb{R}^{N_h}$

zur Bestimmung der Knotenwerte u_i, $i \in \omega_h$.

- Das nichtlineare GS (29) kann man z.B. mit dem Newton-Verfahren lösen, siehe Kap. 5:

Lin. GS $\longrightarrow$ $\underbrace{K_h'(\underline{u}_h^k)}_{= \text{Jacobi-Matrix} = (N_h \times N_h)\text{-Matrix}} \underline{w}_h^k = \underline{f}_h - K_h(\underline{u}_h^k)$, $\underline{u}_h^{k+1} = \underline{u}_h^k + \underline{w}_h^k \xrightarrow[k \to \infty]{} \underline{u}_h$

- <u>Beispiel:</u> 2d Magnetostatik (Elektromotor, Abs. 1.4) $x \in \Omega$

$(30)_{KF}$ • Ges. $u = A_3 \in X$: $-\operatorname{div}(\nu(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x)) = \underbrace{f(x)}_{= J_{i,3}(x)} + \underbrace{\cancel{\frac{\mu_0}{\mu}\left(\frac{\partial H_{02}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{01}}{\partial x_2}\right)}}_{\text{Permanentmag.}}$

+ RB: $u(x) = 0\ \forall x \in \Gamma = \partial\Omega$ eingepr. St.

• Variationsformulierung:

nichtlin.

lin.

$(30)_{VF}$ Ges. $u \in \bar{V}_g = \bar{V}_0 := \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$: $a(u,v) = \langle F, v\rangle\ \forall v \in \bar{V}_0$

mit $a(u,v) = \int_\Omega \nu(x,|\nabla u(x)|)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$

$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$

• FE-Galerkin-Schema $\longleftrightarrow$ FE-GS (nichtlinear)

$(30)_h$ Ges. $u_h \in \bar{V}_{gh} = \bar{V}_{0h}$: $a(u_h, v_h) = \langle F, v_h\rangle\ \forall v_h \in \bar{V}_{0h} \subset \bar{V}_0$

$(30)_h$ $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$: $K_h(\underline{u}_h) = \underline{f}_h$ mit $K_h(\underline{u}_h) = \tilde{K}_h(\underline{u}_h)\underline{u}_h$