b) Aus $(23)^*$ erhalten wir

$$\int_\Omega \underbrace{\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + au - f\right]}_{=0} dx + \qquad \forall v \in V_0$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \left[\frac{\partial u}{\partial N} - q_2\right] v\, ds + \int_{\Gamma_3} \left[\frac{\partial u}{\partial N} - \alpha(q_3 - u)\right] v\, ds = 0$$

d.h.

$$\int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial N} - \varphi\right]}_{\text{stetig}} v\, ds = 0 \quad \forall v \in V_0$$

$$\varphi = \begin{cases} q_2 & \text{auf } \Gamma_2 \\ \alpha(q_3 - u) & \text{auf } \Gamma_3 \end{cases}$$

$\Downarrow$ Eulertrick: Ann. $\exists x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 : [\cdots](x)$ .... $\lightning$

natürliche RB

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial N} - \varphi = 0, \text{ d.h. } \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial N} = q_2 \text{ auf } \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(q_3 - u) \text{ auf } \Gamma_3 \end{array}}$$

c) Die RB 1. Art, d.h. $u = g_1$ auf Γ_1, ist erfüllt, da $u \in V_g$!

Folglich genügt u in Ω der PDgl. (a)) und erfüllt auf Γ die RB (b) + c)), d.h. u ist Lösung von (22), d.h. u ist klassische Lsg. des RWP. ■

3. Unter den Voraussetzungen (vgl Abs. 2.8)

(V0) $\exists\, c = const > 0 : |\langle F, v\rangle| \leq c \|v\|_1 \ \forall v \in V_0$,

(V1) V_0-Elliptizität: $a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \ \forall v \in V_0$

(V2) V_0-Beschränkth.: $|a(w,v)| \leq \mu_2 \|w\|_1 \|v\|_1 \ \forall w, v \in V_0$

Kann man wieder theoretische Resultate zeigen, z.B.:

- $\exists!\, u \in V_g : (23)$ (Lax-Milgram-Satz)
- Diskretisierungsfehlerabschätzungen (Cea-Satz)