Bemerkungen:

1. Die Variationsformulierung (23) ist eine Verallgemeinerung der klassischen Formul. (22). In (23) können geringere Glattheitsforderungen an die Eingangsdaten $\lambda_1, \lambda_2, a, \alpha, f, g_1, g_2, g_3$ gestellt werden, z.B. langt es, wenn die Materialzahlen $\lambda_1, \lambda_2, a, \alpha$ nur stückweise stetig sind, wie es in der Praxis bei verschieden Materialien üblich ist.

2. Jede "hinreichend" glatte verallgem. Lösung $u \in V_g \cap C^2(\overline{\Omega})$, d.h. Lsg. von (23), ist auch eine klassische Lsg., d.h. Lsg. von (22). Tatsächlich, durch partielle "Rückintegration" erhalten wir aus (23) sofort:

$$(23)^* \quad \underbrace{\int_\Omega \left[\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + auv\right] dx}_{= \int_\Omega \left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + au\right] v\,dx + \underbrace{\int_\Gamma \overbrace{\left[\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2\right]}^{= \frac{\partial u}{\partial N}} v\,ds}_{= \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial N} v\,ds + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial N} v\,ds}} + \int_{\Gamma_3} \alpha uv\,ds = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v\,ds + \int_{\Gamma_3} g_3 v\,ds$$

$$\forall v \in V_0$$

a) Wählen zunächst $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset V_0$, d.h. $\int_\Gamma * \cdot v\,ds = 0$

$$\int_\Omega \underbrace{\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + au\right]}_{\text{stetig in } \overline{\Omega}} v\,dx = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset V_0$$

Ann. $\exists x \in \Omega: [\cdot](x) \neq 0$ .... $\lightning$

Euler-Trick $\Downarrow$

PDgl.

$$\boxed{\begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + au - f = 0 \text{ in } \Omega, \\ \text{d.h. PDgl. gilt in } \Omega \,! \end{array}}$$