RESÜMEE:

- **Interpolationsfehlerabschätzungen:**

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1})$$

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{C[a,b]} = O(h^{p+1})$$

wobei $\tilde{u}_h(x) = \mathrm{Int}_h(u) := \sum\limits_{i=0}^{n} u(x_i)\, \varphi_i(x)$

- **Diskretisierungsfehlerabschätzung:**

$$\| \overset{(7)}{u} - \overset{(7)_h}{u_h} \|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$|\!|\!| u - u_h |\!|\!| \approx \| u - u_h \|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\| u - u_h \|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1}) \qquad \text{(Nitsche-Trick)}$$

$$\| u - u_h \|_{C[a,b]} \approx \begin{cases} O(h^{p+1}), & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_\infty(a,b), \\ O(h^{p+\frac{1}{2}}), & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_2(a,b). \end{cases}$$

- **Fehlerabschätzungen für die numerische Integration:**

$$\int_a^b u(x)\,dx \approx \int_a^b \tilde{u}_h(x)\,dx \qquad \text{(verallg. Newton-Cotes)}$$

$$\left| \int_a^b u(x)\,dx - \int_a^b \tilde{u}_h(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (u(x) - \tilde{u}_h(x))\,dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b | u(x) - \tilde{u}_h(x) |\,dx$$

Cauchy

$$\le \sqrt{\int_a^b 1^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |u - \tilde{u}_h|^2\,dx} = \sqrt{b-a}\, \underbrace{\| u - \tilde{u}_h \|_0}_{O(h^{p+1})} = O(h^{p+1})$$