Lemma 2.16: (Interpolationsfehlerabschätzung)

Unter den Voraussetzungen

(19) $\begin{cases} p = 1 \\ u'' \in L_2(\delta_i),\ i = \overline{1,n} \quad (n = NE) \end{cases}$

gilt die Interpolationsfehlerabschätzung

(20) $\| u - \tilde{u}_h \|_{H^1(a,b)} \le (1 + c_F^2)^{0.5} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \| u'' \|^2_{L_2(\delta_i)} \right)^{1/2}$

$\le (1 + c_F^2)^{0.5}\, h\, \| u'' \|_{L_2(a,b)}$

falls $u'' \in L_2(a,b)$, d.h. $u \in H^2(a,b)$, $h = \max\{h_i\}$

Beweis: siehe Folien* NumOpt 25 h + 25 j ■

Setzt man (20) in (16) ein, dann folgt:

(21) $\| u - u_h \|_{H^1(a,b)} \le \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + c_F^2)^{0.5} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \| u'' \|^2_{L_2(x_{i-1}, x_i)} \right)^{1/2}$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.17: (H^1-Konvergenz)

Vor.: 1) (V0), (V1), (V2)

2) $p = 1$ (Lineare Elemente)

3) Lsg. $u \in V_g$: (7) : $\exists\, u'' \in L_2(\delta_i)\ \forall i = \overline{1,n}$.

Bh.: Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

(21) $\| u - u_h \|_{H^1(a,b)} \le \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + c_F^2)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \| u'' \|^2_{L_2(x_{i-1}, x_i)} \right)^{1/2}$

$\le \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{1 + c_F^2}\, h\, \| u'' \|_{L_2(a,b)}$

$u \in V_g \cap H^2(a,b)$