Satz 2.14.: (Lax und Milgram)

Vor.: Es gelten die Vor. (V0), (V1) und (V2).

Bh.: 1. $\exists!\; u \in V_g : (7)$

2. $\exists!\; u_h \in V_{gh} : (7)_h \Leftrightarrow \exists!\; \underline{u}_h \in \mathbb{R}^N : (\underline{7})_h$

Beweis: siehe Literatur!

Satz 2.15.: (Cea)

Vor.: Es gelten die Vor. (V0), (V1) und (V2)

Bh.: Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$(16)\quad \underbrace{\| \overset{(7)}{u} - \overset{(7)_h}{u_h} \|_1}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \le \frac{\mu_2}{\mu_1} \underbrace{\min_{w_h \in V_{gh}} \| u - w_h \|_1}_{\text{Approximationsfehler}}$$

Beweis:

$$(7)\quad u \in V_g : \quad a(u, v_h) = \langle F, v_h \rangle \;\; \forall v_h \in V_{0h} \subset V_0$$

$$-\;(7)_h\quad u_h \in V_{gh} : \quad a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \;\; \forall v_h \in V_{0h}$$

$$(17)\qquad a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{0h}$$

GALERKIN-Orthogonalität!

Setzen $v_h = (u - u_h) - (u - w_h) = w_h - u_h \in V_{0h} \;\; \forall w_h \in V_{gh}$

$$a(u - u_h, u - u_h - (u - w_h)) = 0 \quad \forall w_h \in V_{gh}$$

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h) \quad -\text{"}-$$

$$\text{(V1)} \longrightarrow \quad \mu_1 \| u - u_h \|_1^2 \le a(u - u_h, u - u_h), \qquad a(u - u_h, u - w_h) \le \mu_2 \| u - u_h \|_1 \, \| u - w_h \|_1$$

$\Longrightarrow$ (16) q.e.d.