■ Beurteilung des Fehlers $e = u - u_h \in \tilde{V}_0$:

- Zur Beurteilung des Fehlers benötigen wir eine Norm $\|\cdot\|$ (siehe Abs. 2.1: Normaxiome). In der Praxis sind folgende Normen interessant:

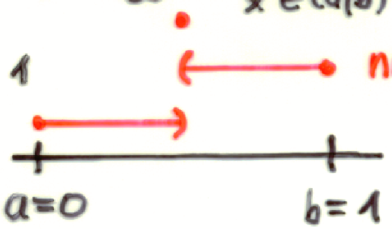
1. **C-Norm:** $\|v\|_C = \|v\|_{C[a,b]} := \max\limits_{x\in[a,b]} |v(x)|$, d.h. (stetig)

$$\|u-u_h\|_C = \max_{x\in[a,b]} |u(x)-u_h(x)| \leq \ ? \quad (h\to 0)$$

Bemerkung: L_∞-Norm: $\|v\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in(a,b)} |v(x)|$

max	min
sup	inf
ess sup	ess inf

$\|v\|_{L_\infty} = 1$

z.B. $v(x) =$ 

nicht notw. stetig

2. **L_2-Norm:** $\|v\|_{L_2(a,b)} = \|v\|_0 := \sqrt{\int_a^b |v(x)|^2 dx}$, d.h.

$$\|u-u_h\|_0 = \sqrt{\int_a^b (u(x)-u_h(x))^2 dx} \leq \ ? \quad (h\to 0)$$

3. **L_p-Norm:** $\|v\|_{L_p(a,b)} := \sqrt[p]{\int_a^b |v(x)|^p dx}$, d.h.

$$\|u-u_h\|_{L_p(a,b)} = \sqrt[p]{\int_a^b |u(x)-u_h(x)|^p} \leq \ ? \quad (h\to 0)$$

4. **H^1-Norm:** $\|v\|_{H^1(a,b)} = \|v\|_1 := \sqrt{\int_a^b (v^2 + (v')^2) dx}$:

$$\|u-u_h\|_1 = \sqrt{\int_a^b \left[|u(x)-u_h(x)|^2 + |u'(x)-u_h'(x)|^2\right] dx} \leq \ ?$$

5. **Energienorm:** $|||v||| := (a(v,v))^{1/2}$, falls die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$
   - symmetrisch, d.h. $a(u,v) = a(v,u) \ \forall u,v \in \tilde{V}_0$
   - positiv, d.h. $a(v,v) > 0 \ \forall v \in \tilde{V}_0 : v \neq 0$

   ist: $$|||u-u_h||| = \sqrt{a(u-u_h, u-u_h)} \leq \ ? \quad (h\to 0)$$