Durchführbarkeit und Stabilität:

Folie 16f

- **Satz 2.12:**

Vor.: $|c_1|>0, \; |c_n|>0$;
$|a_i|>0, \; |b_i|>0 \;\; \forall i=\overline{2,n-1}$; $|b_1|>0, \; |a_n|>0$;

$$\left.\begin{array}{l} |c_i| \geq |a_i|+|b_i| \;\; \forall i=\overline{2,n-1} \\ |c_1| \geq |b_1|, \; |c_n| \geq |a_n| \end{array}\right\} (*)$$

wobei für wenigstens eine der Ungleichungen (*) "$>$" gelten soll.

Bh.: 1. $\Delta_i = c_i - a_i\alpha_i \neq 0 \;\; \forall i=\overline{2,n}$ (Durchführb.)
2. $|\alpha_i| \leq 1 \;\; \forall i=\overline{2,n}$ (Stabilität)

Beweis: mms* (Induktion) bzw. siehe Literatur! ■

- **Interpretation:**

1. $\Delta_i \neq 0$ sichert die Berechenbarkeit von α_{i+1} und β_{i+1}!
2. $|\alpha_i| \leq 1$ sichert ab, daß Rundungsfehler, die in einem Rechenschritt auftreten, beim Übergang zum nächsten Schritt <u>nicht</u> anwachsen.

$$\left.\begin{array}{l} u_i = -\alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} \\ \tilde{u}_i = -\alpha_{i+1}(u_{i+1} + \delta_{i+1}) + \beta_{i+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_i = \tilde{u}_i - u_i = -\alpha_{i+1}\delta_{i+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\delta_i| \leq |\alpha_{i+1}|\,|\delta_{i+1}| \leq |\delta_{i+1}|, \;\; i = n-1, n-2, \dots, 1}$$

Angen.: $\alpha_i = 1.1$: $\delta_1 = (-1)^n \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \delta_n = (-1)^{n-1} (1.1)^{n-1} \delta_n$

$n = 1000$: $(1.1)^{n-1} \approx 10^{41}$!!!

- **Übung 2.13:** Man zeige, daß die Vor. von Satz 2.12 durch die FE-Matrix

$$K_h = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \mathbb{O} \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbb{O} & & -1 & 1+\alpha_b h \end{bmatrix}$$

des GS $(\underline{7})_h$ erfüllt werden!