Zusammenstellung wichtiger Ungleichung:

a) **Cauchy-Ungleichung:**

$$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u,v \in V = L_2(\Omega), H^1(\Omega), \ldots$$

b) **Friedrichs-Ungleichung:**

$$\int_\Omega (u(x))^2 dx \leq c_F^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in \tilde{V}_0,$$

wobei $\tilde{V}_0 = \{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma} \}$
mit einem "echten" Randstück $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma = \partial\Omega$,
d.h. $|\tilde{\Gamma}| := \text{meas}(\tilde{\Gamma}) := \int_{\tilde{\Gamma}} ds > 0$.

Bem.: $V_0 := \{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega \} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

c) **Poincaré-Ungleichung:**

$$\int_\Omega u^2 dx \leq c_P^2 \left\{ \left(\int_\Omega u(x)\, dx \right)^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right\}$$

$\forall u \in H^1(\Omega)$

Mittlungsintegral zur Erkennung von $u \equiv$ const. !

d) **Randeinbettung:** $\Gamma = \partial\Omega$

$$\int_\Gamma u^2 dx \leq c_E^2 \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2) dx \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{L_2(\tilde{\Gamma})} \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{\Gamma} \subset \Gamma}}{\leq} \|u\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_E \|u\|_{H^1(\Omega)}$$