# P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

**“Mathematische Modelle in der Technik“**

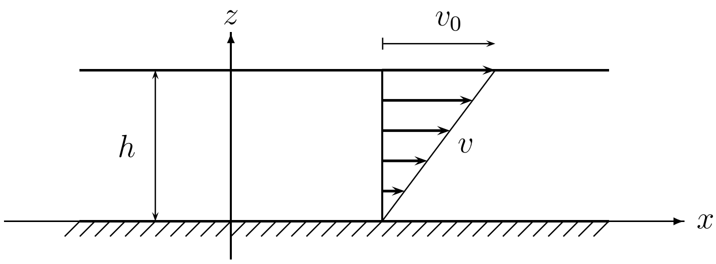
$\boxed{\textbf{PS XI}}$ 29.01. 2010 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : T642):

## 4 Präsentationsaufgaben

$\boxed{39^\star}$ **Couette-Strömung:** Man berechne das ebene Strömungsfeld eines inkompressiblen Newtonschen Fluids zwischen zwei Platten (die Platten seien in Querrichtung genügend weit ausgedehnt), wobei sich eine Platte mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 > 0$ parallel zur anderen Platte bewegen möge (siehe Skizze). Die Strömung sei zeitlich und räumlich voll ausgebildet. Bei welcher $H_a$-Zahl,

$$H_a = -\frac{dp}{dx}\frac{4\,h^2}{v_0\,\mu},$$

tritt (bezüglich $x$-Richtung) teilweise Rückströmung auf ?




**Hinweise:**

1. Gehen Sie von den stationären 3D Navier-Stokes Gleichungen aus:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

2. Vereinfachen Sie diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Annahmen:
   (a) Die Strömung sei zeitlich voll ausgebildet.
   (b) Die Strömung sei räumlich voll ausgebildet.

(c) Die Strömung sei eben.

(d) $f := (f_x, f_y, f_z)^T = 0$.

3. Wie sich zeigt, hängt das Strömungsbild vor allem vom Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ ab. Skizzieren Sie sich einige Geschwindigkeitsprofile und erklären Sie diese anschaulich.

$\boxed{40^\star}$ **Stromfunktion:** Let us consider a two-dimensional, steady state (stationary) flow of a highly viscous, incompressible fluid that can be described by the Stokes Equations

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega, && (4.67)\\ \mathrm{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega. && (4.68) \end{aligned}$$

Assume that the velocity $u$ can be represented by a so-called (scalar) stream-function $\psi$ as

$$u = \mathbf{curl}\,\psi \tag{4.69}$$

with

$$\mathbf{curl}\,\psi = \begin{pmatrix} +\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Show that

$$\mathrm{div}\, u = 0, \tag{4.70}$$

and derive the following relation from the equations (4.67):

$$\nu\Delta^2\psi = \mathrm{curl}\, f \quad \text{in } \Omega, \tag{4.71}$$

where the so-called scalar curl is now defined by the relation

$$\mathrm{curl}\, f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}. \tag{4.72}$$

Conversely, let $\Omega$ be a convex domain, and $\psi$ be a solution to the biharmonic equation (4.71), satisfying the boundary conditions

$$\begin{aligned} \psi &= 0, && (4.73)\\ \frac{\partial\psi}{\partial n} &= 0 && (4.74) \end{aligned}$$

on $\partial\Omega$. Show, that there exists a pressure field $p$, such that $u = \mathbf{curl}\,\psi$ and $p$ solve the two-dimensional Stokes Equations (4.67)-(4.68) as well as the no-slip condition $u = 0$ at the boundary $\partial\Omega$.

# 5 Bakkalaureatsarbeit

- **Thema:** Die Prandtl'sche Grenzschichttheorie
- **Betreuer:** Dipl.-Ing. Peter Gruber
- **Bearbeiter:** Andreas Schwarz
- **Kurzbeschreibung:** Die Grenzschichttheorie, vorgestellt von Ludwig Prandtl am Heidelberger Mathematiker-Kongress 1904, stellt eine der bedeutendsten Fortschritte auf dem Gebiet der Strömungsmechanik dar. Rechergieren und präsentieren Sie die grundlegenden Ideen ausgehend von den Navier-Stokes Gleichungen. Diskutieren Sie zunächst den Spezialfall von Strömungen inkompressibler Medien in zwei Dimensionen, und nehmen Sie dann Bezug auf die allgemeineren Fälle von dreidimensionalen Strömungen, sowie Strömungen kompressibler Medien.
- **Präsentation der Zwischenergebnisse:** PS XII, 29.01. 2009