

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS X 22.01. 2010 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵ Uhr; Raum : T642): **31** – **34**

3.2 Spezielle Strömungen

3.2.1 Poiseuille Strömung in einem Rohr

Um die Flüssigkeitsmenge

$$Q = \int_{y^2+z^2 \leq R} v(y, z) \rho \, dy \, dz \quad (3.55)$$

zu bestimmen, die pro Sekunde durch den Querschnitt (y - z -Ebene) eines Rohrs (die x -Achse liegt in der Mitte des Rohres) der Länge ℓ mit dem Radius R fließt (siehe Abbildung 3), benötigen wir das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} , das aus den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} := \mathbf{0} \quad (3.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.57)$$

und der Haftbedingung am Rohrrand hergeleitet werden kann. Es sollen keine äusseren Kräfte wirken, d.h. $\mathbf{f} := \mathbf{0}$. Die Strömung wird nur durch die gegebene Druckdifferenz Δp zwischen den beiden Rohrenden hervorgerufen. Dann hat offenbar die Geschwindigkeit nur eine Komponente in x -Richtung, welche nicht von x abhängt, d.h.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v(y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

31 Man zeige, dass der Druck die Form

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{\ell} x + c_0 \quad (3.59)$$

hat, wobei $c_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist, und dass $v(y, z)$ die folgende Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen löst:

$$-\Delta v(y, z) = \frac{\Delta p}{\ell \mu} \quad \forall (y, z) \in (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < R^2, \quad (3.60)$$

$$v(y, z) = 0 \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 = R^2. \quad (3.61)$$

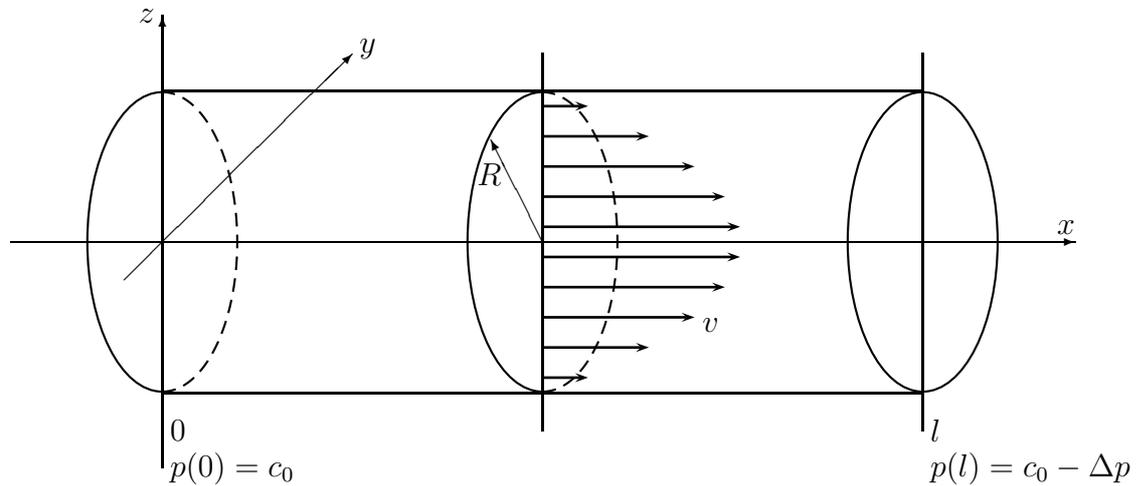


Abbildung 3: Geschwindigkeitsverteilung v einer Flüssigkeit durch ein Rohr.

- 32** Das Randwertproblem (3.60) - (3.61) ist offenbar radialsymmetrisch. Bestimmen Sie die Lösung $v(y, z) = \tilde{v}(r)$, die offenbar nur vom Radius r abhängt, indem Sie das Randwertproblem (3.60) - (3.61) in Polarkoordinaten

$$y = r \cos \varphi \quad (3.62)$$

$$z = r \sin \varphi \quad (3.63)$$

überführen.

- 33** Bestimmen Sie nun die Flüssigkeitsmenge Q , die pro Sekunde durch den Querschnitt des Rohrs fließt !

3.2.2 Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

- 34*** Schreiben Sie die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.56)-(3.57) in Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad (3.64)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (3.65)$$

$$z = z \quad (3.66)$$

für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten.