P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

$\boxed{\textbf{PS IX}}$ 15.01. 2010 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : T642): $\boxed{28}$ – $\boxed{30}$

3 Strömungsmechanik

3.1 Transport-Theorem

$\boxed{28}$ Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 1$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial (F \cdot v)}{\partial x}(x,t) \right] dx \quad !$$

$\boxed{29^\star}$ Die Vektorfunktion $\varphi : \Omega \times (T_1, T_2) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ bildet die Lagrange-Koordinaten X auf die Euler-Koordinaten x ab, d.h. $x = \varphi(X,t)$. Man zeige für $d = 2$ (für $d = 3$ gibt es ein Extrakreuzel !) die Beziehung

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X,t) = D(X,t)\ \operatorname{div}(v(x,t)),$$

wobei $\operatorname{div}(v(x,t)) := \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x,t)$ die Divergenz der Geschwindigkeit v bzgl. x, und D die Determinande der Jacobi-Matrix der Abbildung φ bezeichnet, d.h.

$$D(X,t) := \det(\nabla\varphi(X,t)) \quad \text{mit} \quad \nabla\varphi(X,t) := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(X,t) \right)_{i,j\,\in\,\{1,\ldots,d\}} .$$

$\boxed{30}$ Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 2$ bzw. $d = 3$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int\limits_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(F \cdot v)(x,t) \right] dx \quad !$$