P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

$\boxed{\textbf{PS VI}}$ 4.12. 2009 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : T642): $\boxed{20}$ – $\boxed{22}$

2.2.2 Verzerrungszustand

○ *Vorbemerkung:* Die Verschiebung $v(x)$ eines Punktes $x \in \Omega$ lässt sich darstellen als $v(x) = \phi(x) - x$, wobei $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ Deformation genannt wird. Es ist natürlich einfach, und manchmal sehr hilfreich, Größen wie zum Beispiel Verzerrungen in Abhängigkeit von der Deformation ($E(\phi)$) anstatt der Verschiebung ($E(v)$) darzustellen. Insbesondere sind nur solche Verschiebungen bzw. Deformationen erlaubt, welche für alle $x \in \Omega$ *orientierungserhaltend*, d.h. $\det(\nabla\phi)(x) > 0$, sind. Dies folgt aus der Betrachtung der Volumsänderung eines beliebigen Teilgebietes ω eines Körpers Ω. Mit anderen Worten, für beiliebiges $\omega \subset \Omega$ muss gelten

$$\int_{\phi(\omega)} 1\, d\xi = \int_\omega \det(\nabla\phi)(x)\, dx > 0\,.$$

Da für jedes Teilgebiet $\omega \subset \Omega$, so auch punktweise $\det(\nabla\phi)(x) > 0,\ x \in \Omega$.

$\boxed{20}$ Man zeige, dass die linearisierten Verzerrungen $\varepsilon(v) = (\varepsilon_{ij}(v)),\ i,j = 1,2,3$, einer Verschiebungsfunktion $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in [C^2(\Omega)]^3$ genau dann verschwinden (also $\varepsilon(v) = 0$), wenn $v \in \mathcal{R}$ eine (linearisierte) Starrkörperverschiebung ist, wobei der Unterraum $\mathcal{R} := \{v(x) = a \times x + b : a, b \in R^3\}$ durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-x_3\\x_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_3\\0\\-x_1\end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Zeigen Sie weiters, dass sämtliche Verschiebungen $v \in \mathcal{R}$ orientierungserhaltend sind.

Hinweis: Zeigen, und verwenden Sie $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\, \partial x_k}(x) = \frac{\partial \varepsilon(v)_{ij}}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial \varepsilon(v)_{ki}}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \varepsilon(v)_{jk}}{\partial x_i}(x)\,.$

$\boxed{21}$ Man zeige, dass der Green'sche Verzerrungstensor

$$E(v) = \frac{1}{2}\left(\nabla v^T + \nabla v + \nabla v^T \nabla v\right)$$

einer Verschiebungsfunktion $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in [C^2(\Omega)]^3$ genau dann verschwindet, wenn $v \in \mathcal{S}$ eine (echte) Starrkörperverschiebung ist, wobei der Unterraum $\mathcal{S}$ durch

$$\mathcal{S} := \{v(x) = (Q - I)x + b\ :\ Q \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ Q \text{ orthogonal},\ \det Q = 1,\ b \in R^3\}$$

gegeben ist.

$\boxed{22^\star}$ Zeigen Sie, dass die Winkeländerung φ_{kl} $(k \neq l)$ zwischen den Linienelementen dx_k und dx_l durch die Formel

$$\sin \varphi_{kl} = \frac{2e_{kl}}{\sqrt{1+2e_{kk}}\sqrt{1+2e_{ll}}}$$

gegeben ist (Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Kosinus des Winkels ψ zwischen den defomierten Linienelementen dx'_k und dx'_l) !