P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

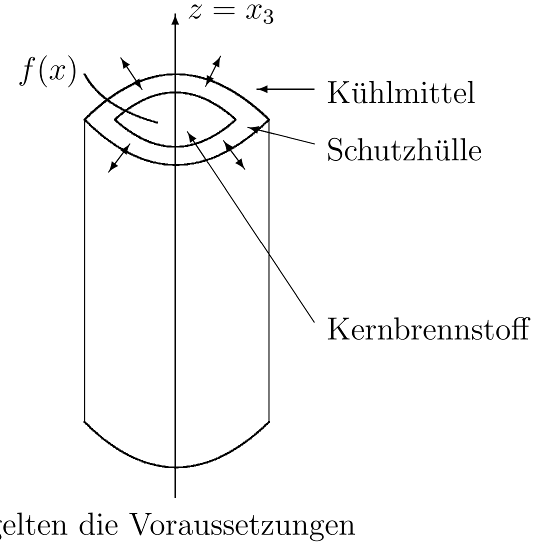
$\boxed{\textbf{PS II}}$ 30.10. 2009 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Raum : T642): $\boxed{5}$ - $\boxed{7}$

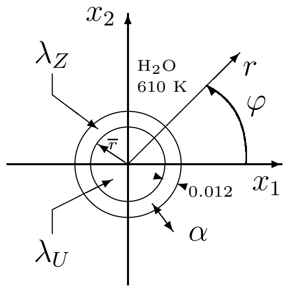
1.3 1D und 2D Wärmeleitprobleme

1.3.1 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit φ- und z-unabhängigen Eingangsdaten

○ Modellproblem “*KKW Temelin*“:

In nuclear power reactors the fuel (= uranium dioxide) is in the form of cylindrical pellets contained in long metal (zirconium alloy) tubes. The nuclear reaction causes heat to be generated in the fuel. This heat is then conducted through the wall of the metal tube into a cooling fluid (= water). The heated water is used to produce steam that is supplied to turbines which turn electric generators. Consider a model of a fuel rod in which the pellets have a radius $\overline{\mathbf{r}}$ of 0.095 m and in which the **wall thickness** is 0.012 m. Let the **conductivity of the fuel** be $3 \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\right]$ and that of the **tube** $17 \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\right]$. Assume that the heat generation in the fuel is given by $f(r) = 7.6\;10^8\,(1-(r/\overline{r})^2) \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]$. Let the **cooling water temperature** be 610 K and the **heat transfer coefficient** between the tube and the water be $3.5 \cdot 10^5 \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\right]$.





$\lambda_U = 3$ W/mK
$\lambda_Z = 17$ W/mK
$\alpha = 3.5 \cdot 10^5$ W/m^{2}K
$\overline{r} = 0.095$ m

Es gelten die Voraussetzungen

1) $\widetilde{\Omega} = \{\,(r,z,\varphi) : 0 \le r < r_0\,,\ -l < z < +l\,,\ 0 \le \varphi < 2\,\pi\,\}$ mit $l \gg r_0$.
2) Daten $\{\lambda, f, g, \alpha\}$ sind φ- und z-unabhängig.

Die gesuchte Temperaturverteilung kann somit sowohl φ- als auch z-unabhängig angenommen werden ($\rightsquigarrow u(x_1, x_2, x_3) = u(r)$) !

$\boxed{5}$ Man zeige, dass sich die Wärmeleitgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = f(x) \quad x \in \widetilde{\Omega} \qquad (1.1)$$

im rotationssymmetrischen Fall $\widetilde{\Omega} = \Omega \times [0, 2\pi)$ bei φ-unabhängigen Eingangsdaten $\{\lambda, f\}$ per Transformation von den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zu Zylinderkoordinaten (r, z, φ) mittels $x_1 = r\cos(\varphi)$, $x_2 = r\sin(\varphi)$, $x_3 = z$ wie folgt umformen lässt:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) \;=\; r\,f(r,z) \qquad (r,z) \in \Omega\,.$$

Also kann der 3D-RWA in $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2D-RWA im Gebiet Ω zugeordnet werden:

$\boxed{6}$ Man zeige, dass sich die

Wärmeleitgleichung in 3D

$$\begin{array}{c}
-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = f(x) \quad x \in \widetilde{\Omega} \\[2ex]
\begin{array}{lrcll}
+\text{ Rbd.} & u & = & g_1 & x \in \widetilde{\Gamma}_1 \\
 & -\lambda\frac{\partial u}{\partial n} & = & g_2 & x \in \widetilde{\Gamma}_2 \\
 & -\lambda\frac{\partial u}{\partial n} & = & \alpha(u - g_3) & x \in \widetilde{\Gamma}_3
\end{array}
\end{array} \qquad (1.2)$$

mit φ-unabhängigen Daten $\{\lambda, f, g_1, g_2, \alpha\}$ und der Eigenschaft

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times [0, 2\pi)\,, \quad \widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \times [0, 2\pi)\,, \quad \widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \times [0, 2\pi)\,, \quad \widetilde{\Gamma}_3 = \Gamma_3 \times [0, 2\pi)$$

in Zylinderkoordinaten als Randwertaufgabe in 2D darstellen lässt:

Wärmeleitgleichung für den rotationssymmetrischen Fall mit φ-unabhängigen Eingangsdaten

$$\begin{array}{c}
-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) = r\,f(r,z) \qquad (r,z) \in \Omega \\[2ex]
\begin{array}{lrcll}
+\text{ Rbd.} & u & = & g_1 & (r,z) \in \Gamma_1 \\
 & -\lambda\frac{\partial u}{\partial n} = -\lambda\left(n_r\,r\,\frac{\partial u}{\partial r} + n_z\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) & = & g_2 & (r,z) \in \Gamma_2 \\
 & -\lambda\frac{\partial u}{\partial n} = -\lambda\left(n_r\,r\,\frac{\partial u}{\partial r} + n_z\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) & = & \alpha(u - g_3) & (r,z) \in \Gamma_3 \\
 & r\,\frac{\partial u}{\partial r} & = & 0 & (r,z) \in \Gamma_R
\end{array}
\end{array} \qquad (1.3)$$

Wie transformiert man die Randbedingungen? Unterscheiden Sie insbesonders die Fälle $\Gamma_R \neq \emptyset$ (welche Rbd. auf Γ_R ??) und $\Gamma_R = \emptyset$ (Gebiet mit Loch, siehe Abb. 1).

$\boxed{7}$ Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem "*KKW Temelin*" auf (beachte Interface zwischen Schutzhülle und Kernbrennstab) und löse die entsprechende 1D RWA analytisch !
Die analytische Lösung $u(r) = ?$ dient später als Referenzlösung in numerischen Tests (explizite Beurteilung des Diskretisierungsfehlers etc. !).

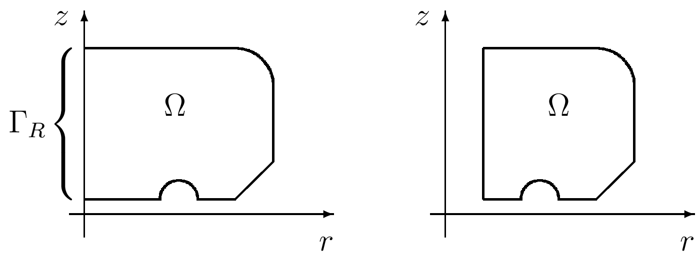


Abbildung 1: Situation links: $\Gamma_R \neq \emptyset$, Situation rechts: $\Gamma_R = \emptyset$