4.4.2. Eigenschaften der Randintegraloperatoren

- Die Operatoren V, K, K', D definieren auf glatten Rändern Γ ($\Gamma \in C^\infty$) Pseudo-Differentialoperatoren (Ψdo) ganzzahliger Ordnung:

$$V: H^s \longrightarrow H^{s+1} \quad \Psi\text{do der Ordnung } -1$$
$$K: H^s \longrightarrow H^s \quad \Psi\text{do der Ordnung } 0$$
$$K': H^s \longrightarrow H^s \quad \Psi\text{do der Ordnung } 0$$
$$D: H^s \longrightarrow H^{s-1} \quad \Psi\text{do der Ordnung } 1$$

- <u>Des weiteren gilt (auch für $\Gamma \in C^{0,1}$):</u>

1. $V = V'$ selbstadjungiert in $H^{-1/2} = H^{-1/2}(\Gamma)$:

$$(10)_V \quad \langle v, Vw\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}} = \langle w, Vv\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}} \quad \forall v,w \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

$$\int_\Gamma\int_\Gamma E(x,y)\,w(x)\,v(y)\,ds_x\,ds_y = \int_\Gamma\int_\Gamma E(x,y)\,v(x)\,w(y)\,ds_x\,ds_y$$
$$a_V(w,v) = a_V(v,w)$$

2. $D = D'$ selbstadjungiert in $H^{1/2} = H^{1/2}(\Gamma)$

$$(10)_D \quad \langle Du, v\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}} = \langle Dv, u\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}} \quad \forall u,v \in H^{1/2}(\Gamma)$$

$$-\int_\Gamma\left(\int_\Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial n_y \partial n_x}(x,y)\,(u(x)-u(y))\,ds_x\right)v(y)\,ds_y =: a_D(u,v) = a_D(v,u) :=$$
$$:= -\int_\Gamma\left(\int_\Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial n_y \partial n_x}\,(v(x)-v(y))\,ds_x\right)u(y)\,ds_y$$

3. K' ist adjungiert zu K in $H^0 := L_2(\Gamma)$

$$(10)_K \quad (Ku, v)_{L_2(\Gamma)} = (u, K'v)_{L_2(\Gamma)} \quad \forall u,v \in L_2(\Gamma)$$

$$\int_\Gamma\left(\int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_x}(x,y)\,u(x)\,ds_x\right)v(y)\,ds_y = \int_\Gamma\left(\int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_x}(x,y)\,v(y)\,ds_y\right)u(x)\,ds_x$$

4. $D1 = -\int_\Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial n_y \partial n_x}(x,y)\,(1-1)\,ds_x = 0$; $\operatorname{Ker} D = \operatorname{span}\{1\}$ für $-\Delta_x$