4.2.3. Die Darstellungsformel

- Aus der VO Analysis bzw. VO PDE kennen Sie die GREENschen Formeln ($\Leftarrow \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx = \int_\Gamma w \cdot n_i\, ds_x \;\; \forall w \in W_1^1(\Omega)$):

<u>1. Greensche Formel:</u>

$$\int_\Omega u(x)\, \Delta v(x)\, dx = \int_\Gamma u(x) \frac{\partial v}{\partial n_x}(x)\, ds_x - \int_\Omega \nabla^T u(x)\, \nabla v(x)\, dx$$

An I: $\forall u \in C^1(\bar\Omega) \quad \forall v \in C^2(\bar\Omega)$

Nu I: $\forall u \in W_2^1(\Omega) \quad \forall v \in W_2^2(\Omega)$

<u>2. Greensche Formel:</u>

$$\int_\Omega (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dx = \int_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial n_x} - v \frac{\partial u}{\partial n_x}\right) ds_x$$

An II: $\forall u, v \in C^2(\bar\Omega)$

Nu I: $\forall u, v \in W_2^2(\Omega)$

Aus der 2. Greenschen Formel erhalten wir formal (?) für

$v(x) = E(x,y)$, $y \in \mathbb{R}^d$ fix und

$u \in C^2(\bar\Omega)$ bzw. $u \in W_2^2(\Omega)$, d.h.

$$\int_\Omega u(x) \underbrace{(-\Delta_x E(x,y))}_{= \delta(x-y)} dx = -\int_\Gamma u(x) \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_x} ds_x + \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} E(x,y)\, ds_x - \int_\Omega \Delta u\, E(x,y)$$

die <u>3. Greensche Formel</u> = <u>Darstellungsformel</u>

$$\boxed{\sigma(y) u(y) = -\int_\Gamma u(x) \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_x} ds_x + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) E(x,y)\, ds_x - \int_\Omega \Delta_x u(x) E(x,y)\, dx} \tag{3}$$

wobei

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1, & y \in \Omega & \text{a)} \\ \frac{\theta}{2\pi}, & y \in \Gamma \;\; (2D) & \text{b)} \\ 0, & y \notin \bar\Omega \;\; (\text{d.h. } y \in \Omega^c) & \text{c)} \end{cases}$$

<u>Beweis!</u> [OST]
a) mms
b) mms
c) ✓