4.2.2. Fundamentallösung (FL)

- Die (nicht eindeutige) FL $E(x,y)$ eines skalaren elliptischen Differentialoperators $L = L_x$ ergibt sich aus:

(2) $$L_x E(x,y) = \delta(x-y) \text{ in } D'(\Omega) \quad (\Omega = \mathbb{R}^d)$$

$$\langle L_x E(x,y), \varphi(x) \rangle_{D' \times D} = \varphi(y) \quad \forall \varphi \in D,\ y \in \Omega$$

- <u>Beispiel 4.1:</u> $L_x = -\Delta_x$, $r = |x-y|$

1D: $E(x,y) = \frac{1}{2}(1 - |x-y|) \in H^1$

2D: $E(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x-y| \in W_1^1$

3D: $E(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \in W_1^1$

- <u>Lemma 4.2:</u>

Für die FL $E(x,y)$ des Laplace-Operators gilt:

a) $-\Delta_x E(x,y) = 0 \quad \forall x \neq y$

b) $\int_\Omega \nabla_x^T E(x,y) \cdot \nabla_x \varphi(x)\, dx = \varphi(y) \quad \forall \varphi \in \mathring{W}^1_\infty(\Omega)$

$\mathring{C}^1(\Omega)$, $D(\Omega)$

$\forall$ (f.f.x) $y \in \Omega$

<u>Beweis:</u> mms

- <u>Übersicht:</u> über FL von Differentialoperatoren L siehe

[Ortner: 80] Ortner N.: Regularisierte Faltungen von Distributionen. ZAMP, v.31, 133-173, 1980.

<u>Weitere Literaturhinweise:</u>

[Steinbach: 03] Numerische Näherungsverfahren für elliptische RWP. Teubner-Verl., 2003.
[OST:03]
Kap 5: 89-105.