b) <u>Approximationsabschätzung</u>: $\|\psi\|_{W_2^{-1}(\omega)} \leq ?$

durch Abbildung auf Referenzgebiet,
dort Anwendung des Lemmas von Bramble & Hilbert
und dann Rückabbildung:

Unter den Vor. (i) $u \in W_2^2(\Omega)$ und $\bar{\omega}$ – bel. reg. Gitter, sowie zusätzlichen Glattheitsvor. an die Daten $\{a, c, f\}$ erhält man die Abschätzung

$$(28) \quad |(\psi, z)| \leq \underbrace{c(u)}_{c \cdot \|u\|_{W_2^2(\Omega)}} h \, \|z\|_{\mathring{W}_2^1(\omega)}$$

Tatsächlich, aus der Approximationsfehleraufsplittung

$$\psi(x) = L_h u - L_h \overbrace{V}^{=\bar{f}} \overset{(3)}{=}$$

$$= L_h u - \underbrace{\left[-\frac{1}{H(x)} \int_{\partial \bar{\Omega}(x)} a(x) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds_x + \frac{1}{H(x)} \int_{\bar{\Omega}(x)} c u \, dy \right] + \frac{1}{H(x)} \int_{\bar{\Omega}(x)} f \, dy - \bar{f}(x)}_{=0}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{H(x)} \sum_{\xi \in S'(x)} \bar{a}(x_\xi) \frac{u(\xi) - u(x)}{h(x,\xi)} s(x_\xi) - \left[-\frac{1}{H(x)} \int_{\partial \bar{\Omega}(x)} a(x) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds_x \right] \right\}$$

$$+ \left\{ \bar{c}(x) u(x) - \frac{1}{H(x)} \int_{\bar{\Omega}(x)} c u \, dy \right\} + \left\{ \frac{1}{H(x)} \int_{\bar{\Omega}(x)} f \, dy - \bar{f}(x) \right\}$$

$$\overset{z.B.}{=} 0, \text{ falls } \bar{f}(x) = \frac{1}{H(x)} \int_{\bar{\Omega}(x)} f \, dy$$

$$= \psi_H(x) + \psi_{cu}(x) + \underbrace{\psi_f(x)}_{=0} = \psi_H(x) + \psi_{cu}(x)$$

$$|(\psi, z)| \leq \underbrace{|(\psi_H, z)|}_{1)} + \underbrace{|(\psi_{cu}, z)|}_{2)}$$

! Partielle Summation !