Beweistechnik:

Btr. o. B. d. Allg. das reine Dirichlet-Problem ($\gamma_1 = \gamma$).
Das Fehlerschema hat dann die Form

Approx.-Fehler

$$(25)\quad z = u - v : \bar{\omega} \to \mathbb{R}^1 : \quad L_h z(x) = \psi(x) \quad \forall x \in \omega = \overset{\circ}{\omega}$$
$$z(x) = 0 \quad \forall x \in \gamma = \gamma_1$$

Zu zeigen ist:

$$\boxed{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega) - W_2^{-1}(\omega)\text{-Stabilität}} + \boxed{\text{Approx. } \|\psi\|_{W_2^{-1}(\omega)}} \Rightarrow \boxed{\text{diskr. Konv. in } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)}$$

a) (26)   b) (28)   (24)

a) $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega) - W_2^{-1}(\omega)$ - Stabilität:

- Definieren diskretes $L_2(\omega)$ - Skalarprodukt

$$(v, z) \equiv (v, z)_{L_2(\omega)} := \sum_{x \in \omega} v(x)\, z(x)\, H(x)$$

- Multiplizieren (25) skalar mit z und schätzen nach oben und unten ab:

$$\tilde{\mu}_1 \|z\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \le (L_h z, z) = (\psi, z) \le \underbrace{\left[\sup_{v} \frac{|(\psi, v)|}{\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)}}\right]}_{=: \|\psi\|_{W_2^{-1}(\omega)}} \|z\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)}$$

$\boxed{(27)}$ Folie 41!

- Resultat:

$$(26)\quad \boxed{\|z\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \le c_S \|\psi\|_{W_2^{-1}(\omega)} \quad \text{mit } c_S = \tilde{\mu}_1^{-1}}$$