Bemerkung 3.4: Approximation des Konvektionsterms

Der Konvektionsterm

$$\int_{\mathcal{X}(x)} (b, \nabla u)\, dy$$

kann so approximiert werden (Upwind-Approximation), daß die Monotonie von L_h ($\Rightarrow$ damit das diskrete Maximumprinzip) erhalten bleibt. Ausgangspkt. sind die folgenden Beziehungen:

$x \in \omega = \mathring{\omega} \cup \gamma_N$:

$$\ldots \approx \int_{\mathcal{X}(x)} (b, \nabla u)\, dy = \int_{\partial\mathcal{X}(x)} (b, \vec{n}) \cdot u\, ds - \int_{\mathcal{X}(x)} \operatorname{div} b \cdot u\, dy$$

$\longleftarrow$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ u \equiv 1}}{=} \underbrace{\int_{\partial\mathcal{X}(x)} (b, \vec{n})(y) \left[u(y) - u(x)\right] ds_y}_{=:\, I(x)} + \underbrace{\int_{\mathcal{X}(x)} \operatorname{div} b(y) \left[u(x) - u(y)\right] dy}_{\approx\, g(x)}$$

$$\left[\int_{\mathcal{X}(x)} \operatorname{div} b(y)\, dy - \int_{\partial\mathcal{X}(x)} (b, \vec{n})\, ds\right] u(x) = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{div} b = 0}}{=} \int_{\partial\mathcal{X}(x)} (b(y), \vec{n}(y)) \left[u(y) - u(x)\right] ds_y = I(x) \approx \to$$

$\approx \ldots$ (B. Heinrich)

1D-Bsp.: $u : [0,1] \to \mathbb{R}^1$:

$$-u''(x) + b u'(x) = 0, \quad x \in (0,1)$$
$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 1$$

$v = u_h : \bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0,n}\} \to \mathbb{R}^1$:

$$-v_{\bar{x}x,i} + b \begin{cases} v_{x,i}, & \text{falls } b < 0 \\ v_{\bar{x},i}, & \text{falls } b > 0 \end{cases} = 0, \quad i = \overline{1,n-1}$$
$$v_0 = 0$$
$$v_n = 1$$

$v_i \approx u(x_i)$

mit $v_{x,i} = \dfrac{v_{i+1} - v_i}{h}$, $v_{\bar{x},i} = \dfrac{v_i - v_{i-1}}{h}$, $v_{\bar{x}x,i} = \dfrac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}$.