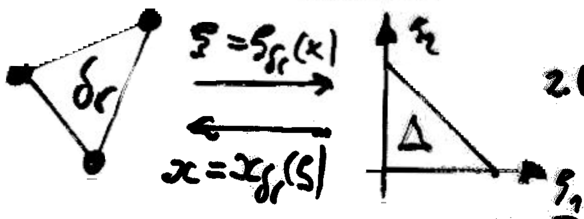
## Typische Anwendung des 1. Strangschen Lemmas: = Analysis der Effekte der numerischen Integration

Btr. dazu wieder Modellproblem aus Pkt. 2.2.1 mit den Daten: $a=0$, $\varkappa=0$, $g_1=0$, $g_2=0$, $g_3=0$:

- $V = H^1(\Omega)$, $V_0 = \{v \in V : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\} = V_g$,
- $a(u,v) = \int_\Omega \lambda(x) \nabla^T u(x) \nabla v(x)\, dx$

$$a_h(u_h,v_h) = \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{\beta \in S_r} w_r^{(\beta)} (\,\cdot\,)_{\xi = \xi_r^{(\beta)}} \cdot \frac{1}{2}$$

Gewichte, Stützstellen, meas $\Delta$



z.B. $S_r = \{1\}$, $\xi_r^{(1)} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $w_r^{(1)} = 1$

wobei $(\,\cdot\,) = \lambda(x_{\delta_r}(\xi)) J_{\delta_r}^{-T} \nabla_\xi^T u_h(\cdot) J_{\delta_r} \nabla^T u_h(\cdot) |J_{\delta_r}|$

- $\langle F, v \rangle := \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$

$$\langle F_h, v \rangle := \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{\beta \in S_r} w_r^{(\beta)} f(x_{\delta_r}(\xi_r^{(\beta)})) v_h(x_{\delta_r}(\xi_r^{(\beta)})) |J_{\delta_r}| \cdot \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Ü 2.13}}$ Welche Voraussetzungen müssen die Daten $\lambda \in L_\infty(\Omega) \cap W_2^2(\delta_r)$, $f \in L_2(\Omega) \cap W_2^2(\delta_r)$ $\forall r \in \mathbb{R}_h$ $\forall h \in \Theta$ und die Quadraturformel (d.h. algeb. Genauigkeit für $\int_\Delta \varphi(\xi) d\xi$ !) erfüllen, damit $\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \le c(u,f,\lambda)\, h$ gilt, d.h. die gleiche Genauigkeit $O(h)$ wie im exakten Fall erreicht wird! Kann die $O(h)$-Genauigkeit bereits für die Schwerpkt-formel $S_r = \{1\}$, $w_r^{(1)} = 1$, $\xi_r^{(1)} = (1/3, 1/3)$ garantiert werden? Trainieren Sie die Technik zunächst für den 1D-Fall: Ges. $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$: $\int_0^1 \lambda(x) u'(x) v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x) v(x)\, dx$ $\forall v \in V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$ und linearen finiten Elementen auf gleichmäßigen Gittern!