5. A-priori-Abschätzung von $|u|_{k+1,\Omega}$ bzw. $\|\cdot\|_{k+1,\Omega}$ mit den Eingangsdaten ($\Downarrow$ W_2^{k+1}-Koerzitivität):

z.B. Poisson-Gleichung mit Dirichletschen RB in einem konvexen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

KF: $-\Delta u = f$ in Ω

$u = 0$ auf $\Gamma = \partial\Omega$

VF: Ges. $u \in V_g = V_0 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla^T u \, \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \quad \forall v \in V_0$$

$f \in L_2(\Omega)$

<u>W_2^2-Koerzitivität:</u>

Aus $f \in L_2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *, konvex, $\partial\Omega \in C^{0,1}$ folgt:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ \exists!\ u \in V_0 \cap W_2^2(\Omega) \\ 2.\ |u|_{2,\Omega} \leq 1 \cdot \|f\|_{0,\Omega} \end{array}} \quad c_K = 1$$

<u>Beweis:</u> mms*

$$\int_\Omega f^2 dx = \int_\Omega (\Delta u) \cdot (\Delta u) \, dx \overset{\text{partielle Integr.}}{=} \ldots$$