2.4.3. Konvergenz in der H^1-Norm

Satz 2.8: (W_2^1-Konvergenz)

Vor.: 1. Standardvor. an Variationsformulierung:

1) $F \in \overset{\circ}{V}_0^*$ $\qquad$ ($\overset{\circ}{V}_0 \subset \overset{\circ}{V} = W_2^1(\Omega)$)

2) $a(\cdot,\cdot) : \overset{\circ}{V} \times \overset{\circ}{V} \to \mathbb{R}^1$ - stetige Bilinearform:

2a) $a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_0$

2b) $|a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{V}_0$

2. Vor. 1. und 2. von Satz 2.6 (Approx.-Satz)

3. $\overset{\circ}{V}_{gh} = g_h + \overset{\circ}{V}_{0h} \subset \overset{\circ}{V}_g$ - endlichdim. Hyperebene mit $\overset{\circ}{V}_{0h} \subset \overset{\circ}{V}_0$ - FE-Unterraum, $g_h \in \overset{\circ}{V}_g \cap \overset{\circ}{V}_h$ ges.

4. $u \in \overset{\circ}{V}_g : a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_0 \qquad (1)$

$u_h \in \overset{\circ}{V}_{gh} : a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in \overset{\circ}{V}_{0h} \qquad (1)_h$

5. Regularitätsresultat:

a) $u \in \overset{\circ}{V}_g \cap W_2^{k+1}(\Omega) = H^{k+1}(\Omega)$

b) $u \in \overset{\circ}{V}_g$ und $u \in W_2^{k+1}(\delta_r) \quad \forall r \in R_h \ \forall h \in \Theta$

Bh.: Dann gilt:

$$(23) \quad \|u-u_h\|_{1,\Omega} \overset{5b)}{\leq} \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1}\bar{a}_{1,k+1}}_{=: c_{1,k+1}} \Big[\sum_{r \in R_h}{}' h_r^{2k} |u|^2_{k+1,\delta_r}\Big]^{1/2} \overset{5a)}{\leq} c_{1,k+1} h^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Beweis: folgt sofort aus (15) = Satz von Cea = Satz 1.4 NuPDE und Approximationssatz 2.6 bzw. Bem. 2.7.2 (d.h. (18*)):

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \overset{\text{CEA}}{\leq} \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{v_h \in \overset{\circ}{V}_{gh}} \|u-v_h\|_{1,\Omega} \overset{\text{Approx-Satz 2.6}}{\leq} c_{1,k+1} [\quad]^{1/2} \leq c_{1,k+1} h^k |u|_{k+1,\Omega}$$

q.e.d.