Übungsaufgaben: zu Pkt. 1.2.3.

$\boxed{\text{Ü 1.10}}$ Man zeige, daß die folgenden Aussagen gelten: (1.13) Ges. $u \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$: $\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \; \forall v$

1) $F \in V_0^* = H^{-2}(\Omega) = W^{-2}$

2) $a(\cdot,\cdot): V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}^1$ – Bilinearform:

2a) $\exists \mu_1 = const > 0: \; a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|^2_{2,\Omega} \; \forall v \in \tilde{V}_0 = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$,

2b) $\exists \mu_2 = const > 0: \; |a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|_{2,\Omega} \|v\|_{2,\Omega} \; \forall u,v \in \tilde{V}_0$,

2c) $a(u,v) = a(v,u) \; \forall u,v \in \tilde{V}_0$.

Aus diesen Eigenschaften folgt unmittelbar

- $\exists!$ (Lax-Milgram) (Vor. 1)–2b), aber nicht 2c))
- Äquivalenz zum MP

wobei $\|v\|_{2,\Omega} := \|v\|_{H^2(\Omega)}$.

$\boxed{\text{Ü.1.11}}$ Geben Sie die Variationsformulierungen der in Bem. 1.6.2. angegebenen RWAen und untersuchen Sie die Existenz und Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen (Lax-Milgram)! Nehmen Sie die wesentlichen RB o.B.d.A. (Homogenisieren) als homogen an!