■ Übungsaufgaben: zu Pkt. 1.2.2

Ü 1.7 Zeigen Sie, daß (8) äquivalent ist zum LAMÉschen System PDgl.:

$$-\mu\,\Delta u(x) - (\lambda+\mu)\,\nabla \operatorname{div} u(x) = f(x),\ x \in \Omega$$

+ RB: $u = \bar{u}$ auf Γ_1 und $\sigma \cdot n = t$ auf Γ_2

mit geg. $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, $t = (t_1, t_2, t_3)^T$ und

$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$ – Vektorlaplace,

∇ = grad = Gradient, div = Divergenz

Ü 1.8 Man zeige zunächst, daß für die 1. RWA ($\Gamma_1 = \Gamma$) gilt:

a) $a(\cdot,\cdot)$ ist symmetrisch, d.h. $a(u,v) = a(v,u)\ \forall u,v \in \bar{V}$,

b) $a(\cdot,\cdot)$ ist nichtnegativ, d.h. $a(v,v) \geq 0\ \forall v \in \bar{V}$,

c) $a(\cdot,\cdot)$ ist auf $\bar{V}_0 := \{v \in \bar{V} = [H^1(\Omega)]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$ positiv, falls $\operatorname{meas}_2 \Gamma_1 > 0$, d.h.

$a(v,v) > 0\ \forall v \in \bar{V}_0 : v \not\equiv 0$.

Aus a) und b) folgt nach Pkt. 1.1 die Äquivalenz von VF $(9)_{VF}$ und MP $(9)_{MP}$.

Ü 1.9 Man zeige, daß für die 1. RWA ($\Gamma_1 = \Gamma$) im Falle isotropen und homogenen Materials die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Satzes erfüllt sind und gebe μ_1 und μ_2 an!

Hinweis zum Beweis der V_0-Elliptizität:

1) $a(u,v) \geq 2\mu \int_\Omega \sum (\varepsilon_{ij}(v))^2\, dx$

2) KORNsche Ungl.: $\int_\Omega \sum (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx \geq c_K |v|^2_{H^1(\Omega)}\ \forall v \in \bar{V}_0$

3) Friedrichs-Ungl.