Übungsaufgaben: zu Def. 1.2.1

Ü1.1. Formulieren Sie für RWA (5) die klassischen Vor. an die Eingangsdaten! Geben Sie hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine verallgem. Lsg. $u \in V_g \cap X \cap H^2(\Omega)$: (6) auch Lsg. von (5) im klassischen Sinne ist! Betrachten Sie zum "Training" zunächst das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung:

$$(5)\begin{cases} \text{Ges. } u \in X = C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}): \\ -\Delta u(x) = f(x), \; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \, {}^{*}, \\ u(x) = g(x), \; x \in \Gamma = \partial\Omega \in C^2 \end{cases}$$

$$?\Uparrow\Downarrow?$$

$$(6)\begin{cases} \text{Ges. } u \in V_g := \{v \in V = H^1(\Omega) : v = g \text{ auf } \Gamma\}: \\ \underbrace{\int\limits_\Omega \nabla^T u \, \nabla v \, dx}_{= a(u,v)} = \underbrace{\int\limits_\Omega f v \, dx}_{= \langle F, v \rangle} \quad \forall v \in V_0 = \mathring{H}^1(\Omega) \end{cases}$$

Ü1.2 Zeigen Sie, daß in den folgenden Fällen a) – c) die Vor. des Lax-Milgram-Satzes erfüllt sind und geben Sie μ_1 und μ_2 an!

a) Zusätzlich zu den Vor. (7) gelte:
$b_i = 0$; $c(x) \geq 0$ $\forall$ f.ü. $x \in \Omega$; $\alpha(x) \geq 0$ $\forall$ f.ü. $x \in \Gamma_3$; $\text{meas}_{d-1}(\Gamma_1) > 0$.

b) Zusätzlich zu den Vor. (7) gelte:
$b_i = 0$; $c = 0$; $\alpha(x) \geq \underline{\alpha} = \text{const} > 0$ $\forall$ f.ü. $x \in \Gamma_3$, $\text{meas}_{d-1}(\Gamma_3) > 0$, $\Gamma_1 = \emptyset$.

c) Zusätzlich zu den Vor. (7) gelte:
$b_i = 0$, $c(x) \geq \underline{c} = \text{const}$ $\forall$ f.ü. $x \in \Omega$; $\Gamma = \Gamma_2$ (d.h. $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \emptyset$).