Fehlerschema für das implizite Euler-Verfahren (5) = (6)$_{\theta=1}$:

$$z_i^{j+1} = z(x_i, t_{j+1}) := \overset{(1)}{u}(x_i, t_{j+1}) - \overset{(5)}{v}(x_i, t_{j+1}):$$

$$(7)\quad z^{j+1} := \begin{bmatrix} z_1^{j+1} \\ z_2^{j+1} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{j+1} \end{bmatrix} = z^j - \varkappa \frac{\tau}{h^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{=: A = A^T > 0 \text{ spd}} z^{j+1} + \tau \psi^{j+1}$$

$$\left(I + \varkappa \frac{\tau}{h^2} A\right) z^{j+1} = z^j + \tau \psi^{j+1}$$

$$z^{j+1} = \left(I + \varkappa \frac{\tau}{h^2} A\right)^{-1} z^j + \tau \left(I + \varkappa \frac{\tau}{h^2} A\right)^{-1} \psi^{j+1}$$

$$\|z^{j+1}\| \le \underbrace{\Big\| \big(\underset{\text{spd}}{I + \varkappa \tfrac{\tau}{h^2} A}\big)^{-1} \Big\|}_{\le 1} \|z^j\| + \tau \underbrace{\Big\| \big(I + \varkappa \tfrac{\tau}{h^2} A\big)^{-1} \Big\|}_{\le 1} \|\psi^{j+1}\|$$

$$\le \|z^j\| + \tau \|\psi^{j+1}\| \le \ldots \le$$

$$\le \|z^0\| + \tau \left(\|\psi^1\| + \|\psi^2\| + \ldots + \|\psi^{j+1}\| \right)$$

$$\le \underbrace{\|z^0\|}_{\substack{= 0 \\ \text{bzw} = O(\tau + h^2)}}{}^{(\text{Rdf})} + \underbrace{t_{j+1} \max_{k=1,j+1} \|\psi^k\|}_{= O(\tau + h^2)}$$

$$\le c\,(\tau + h^2)$$

d.h. impl. Euler ist unbedingt stabil!