1.3. Typische mathematische Modelle für PDgl. und ihr technischer Hintergrund

1.3.1. ARWA für parabolische PDgl.

- Ges. $u(x,t) \in X \subset C^{2,1}(Q)$:

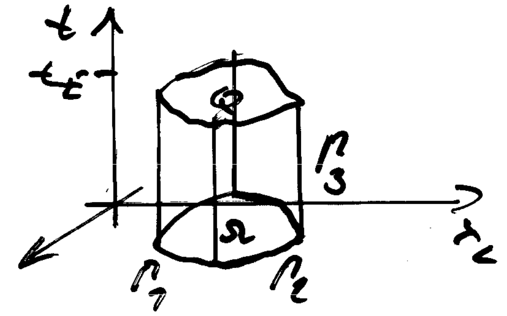
(9) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a\,\Delta u(x,t) = f(x,t)$, $(x,t) \in Q := \Omega \times (0,t_E)$

↑ LAPLACE-Operator

+ RB: • 1. Art = Dirichlet: $u(x,t) = g_1(x,t)$, $x \in \Gamma = \partial\Omega$, $t \in (0,t_E)$
  • 2. Art = Neumann: $-a\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g_2(x,t)$ – " –
  • 3. Art = Robin: $-a\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - u_\Omega)$ – " –
  4. Art = gemischt: i. Art auf Γ_i, $i = \overline{1,3}$

+ AB: $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \overline{\Omega}$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – Rechengebiet (†)
d – Ortsdimension ($d = 1, 2, 3$)



- Modelliert z. B.:
  - Instationäre Wärmeausbreitung (→ Wärmeleitgl.)
  - Instationäre Diffusionsprozesse (→ Diffusionsgl.)

  ⋮ etc

- Semidiskretisierung im Ort (FDM, FEM) führt auf AWA für System gew. Dgl. 1. Ordnung zur Bestimmung von $\underline{u}(t) := (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$:

(10) $\begin{cases} \dot{\underline{u}}(t) = \underline{f}(t, \underline{u}(t)) := -K\,\underline{u}(t) + \underline{b}(t), \; t \in (0,t_E) \\ + \text{AB}: \underline{u}(0) = \underline{u}_0 \end{cases}$

wobei $\dot{\underline{u}}(t) := \frac{d\underline{u}}{dt}(t) = (\dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_N(t))^T$.