

## Prüfungsfragen

---

1. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, instationäres Wärmeleitproblem und lösen Sie es numerisch mit dem Differenzenverfahren ! Was können Sie über Approximation, Stabilität und Konvergenz aussagen?
2. Wie würden Sie das folgende örtlich eindimensionale Schwingungsproblem numerisch lösen ? Gesucht ist  $u(x,t)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T] \quad (1)$$

unter den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T] \quad (2)$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in [0,1]. \quad (3)$$

3. Man löse die Zweipunkterandwertaufgabe

$$-u''(x) + a(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1),$$

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u(1) = 1$$

mit der Methode der finiten Elemente ! Was wissen Sie über den Diskretisierungsfehler?

4. In der Praxis werden Integrale der Form

$$\int_a^b g(x) dx$$

numerisch berechnet. Erklären Sie die Gauß-Formeln und leiten Sie eine Fehlerabschätzung für die Mittelpunktsregel (= Gauß 1 = einfachste Gauß-Formel) her !

5. Was verstehen Sie unter einem Lagrangschen Interpolationspolynom und wie kann man es zur numerischen Integration nutzen ?
6. Wie würden Sie ein Gleichungssystem mit einer tridiagonalen Systemmatrix auflösen? Unter welchen Bedingungen können Sie die Durchführbarkeit und die Stabilität des Algorithmus garantieren ?

7. Geben Sie die Variationsformulierung des vom Prüfer ad hoc gegebenen Wärmeleitproblems an und lösen Sie es numerisch mit der Methode der finiten Elemente !
8. Bei der Diskretisierung von elliptischen Randwertaufgaben zweiter Ordnung durch die FEM entstehen Gleichungssysteme der Art  $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$  zur Bestimmung des Vektors der Knotenwerte  $\underline{u}_h$ , wobei  $K_h$  die Steifigkeitsmatrix und  $\underline{f}_h$  den Lastvektor bezeichnen. Welche Eigenschaften haben diese Gleichungssysteme ? Wie würden Sie diese Gleichungssysteme auflösen ?
9. Erklären Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren ! Zeigen Sie, dass das Gaußsche Eliminationsverfahren zur  $LU$ -Zerlegung äquivalent ist ! Wieviel arithmetische Operationen benötigt das Gaußsche Eliminationsverfahren für eine vollbesetzte Matrix und wieviel arithmetische Operationen für eine Bandmatrix mit der Bandweite  $m$  ?
10. Welche Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Form  $Ax = b$  kennen Sie ?
11. Erklären Sie das Gradientenverfahren und das konjugierte Gradientenverfahren ? Was verstehen Sie unter einer Vorkonditionierung ?
12. Verwenden Sie zur Semidiskretisierung des Ortes des örtlich eindimensionalen, instationären Wärmeleitproblems

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in (a,b) \times (0,T] \quad (4)$$

$$u(a,t) = g_a(t), \quad u(b,t) = g_b(t) \quad \forall t \in (0,T] \quad (5)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in [a,b]. \quad (6)$$

die Finite-Elemente-Methode (FEM) ! Leiten Sie die Anfangswertaufgabe (AWA) zur Bestimmung der zeitabhängigen Koeffizienten (Temperaturtraktorien) im FE-Ansatz ab und lösen Sie die entstehende AWA numerisch ?

13. Verwenden Sie zur Semidiskretisierung des Ortes des Schwingungsproblems (1) - (3) die Finite-Elemente-Methode (FEM) ! Leiten Sie die Anfangswertaufgabe (AWA) zur Bestimmung der zeitabhängigen Koeffizienten im FE-Ansatz ab und lösen Sie die entstehende AWA numerisch ?
14. Leiten Sie das explizite und das implizite Euler-Verfahren zur numerischen Lösung von AWA der Art
 
$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in [0, T], \quad u(0) = u_0 \quad (7)$$
 her ! Bestimmen Sie die Konsistenzordnung und den Stabilitätsbereich beider Verfahren !
15. Definieren Sie die Begriffe *lokaler Fehler*, *Abschneidefehler*, *Konsistenzordnung* und *globaler Fehler* von Runge-Kutta-Verfahren ? Geben Sie eine Abschätzung des lokalen und globalen Fehlers für das explizite Euler-Verfahren zur Lösung von (7) an ?
16. Erläutern Sie die expliziten und impliziten Runge-Kutta-Formeln zur numerischen Lösung von (7) ! Was versteht man unter dem Begriff der *A-Stabilität* von Runge-Kutta-Formeln ? Geben Sie Beispiele A-stabiler Runge-Kutta-Formeln an !