■ Resultat: Primale Variationsformulierung

Prinzip der virtuellen Verschiebungen
Prinzip der virtuellen Arbeit

(42) Ges. $u \in V_0 = \{ v \in V = [H^1(\Omega)]^3 : v = 0 \text{ auf } \Gamma_u \}$:

$$a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0$$

wobei

$$\langle F, v \rangle := \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_t} t_i v_i \, ds = \int_\Omega f^T v \, dx + \int_{\Gamma_t} t^T v \, ds,$$

$$a(u,v) := \int_\Omega \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx = \int_\Omega \sigma^T(u) \varepsilon(v) \, dx$$

$$\overset{\text{Hook}}{=} \int_\Omega D_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx = \int_\Omega \varepsilon^T(u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrix der elast. Konst.}}}{D} \varepsilon(v) \, dx$$

$$\overset{\text{isotrop}}{=} \int_\Omega \Big\{ \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(v) + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \Big\} dx$$

$$= \int_\Omega \{ \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + 2\mu \, \varepsilon^T(u) \varepsilon(v) \} \, dx$$

mit $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in [L_2(\Omega)]^3$, $t = (t_1, t_2, t_3)^T \in [L_2(\Gamma_t)]^3$ ges.,
$D_{ijkl} \in L_\infty(\Omega)$: $0 < \underline{\lambda}_{min}(D) \le \lambda(D(x)) \le \overline{\lambda}_{max}(D) \ \forall^{\circ} x \in \Omega$,
bzw. $\lambda, \mu \in L_\infty(\Omega)$: $0 < \underline{\lambda} \le \lambda(x) \le \overline{\lambda}$, $0 < \underline{\mu} \le \mu(x) \le \overline{\mu} \ \forall^{\circ} x \in \Omega$.

NR: $D_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) = \{ \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v)$

$$= \lambda \varepsilon_{kk}(u) \varepsilon_{ii}(v) + \mu \big(\varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) + \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \big)$$

<u>Bem.:</u> Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ ist offenbar

- symmetrisch, d.h. $a(u,v) = a(v,u) \ \forall u,v \in V_0$
- nichtnegativ, d.h. $a(v,v) \ge 0 \ \forall v \in V_0$

$a(\cdot,\cdot)$ ist sogar positiv, d.h. $a(v,v) > 0 \ \forall v \in V_0$